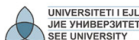


Njehsimi diferencial

Derivati: shpejtësia e çastit dhe pjerrtësia

F. M. Berisha



Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Kuptimi i nocionit të derivatit të një funksioni, dhe lidhmëria me pjerrtësinë e grafikut dhe shpejtësinë e ndryshimit të funksionit.
- Identifikimi i lidhmërisë ndërmjet derivatit të një funksioni dhe rritjes ose zvogëlimit të tij.
- Zbatimi i derivateve të funksioneve të biznesit në aplikacione
- Njoftimi me simbolikën e shënimit të derivatit

Përmbajtja

- 1 Nocioni i derivatit të një funksioni
 - Shpejtësia e çastit e ndryshimit të një funksioni
 - Pjerrtësia e lakores
 - Derivati i një funksioni
- 2 Shembuj
 - Shembull ekuacioni tangjente të një grafiku
 - Shembull aplikacioni biznesi
- 3 Funksionet e derivueshme
 - Disa mënyra shënimi të derivatit
 - Lidhmëria ndërmjet derivueshmërisë dhe vazhdueshmërisë së një funksioni

Shpejtësia e çastit e ndryshimit të një funksioni

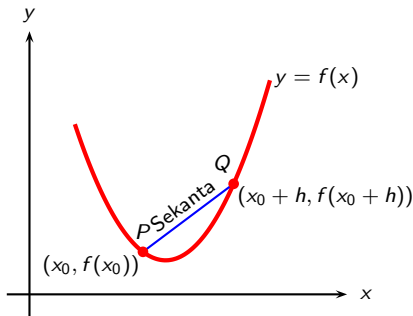


Figura: Grafiku i $f(x)$ me sekantë
nëpër pikat $P(x_0, f(x_0))$ dhe
 $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

- Shpejtësia mesatare e ndryshimit të funksionit:

$$v_{\text{mes}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Shpejtësia e çastit:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pjerrtësia e tangjentës së lakores

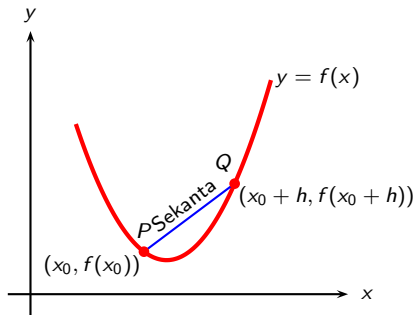


Figura: Kur $h \rightarrow 0$ sekantat tentojnë nga tangjenta nëpër P .

- Pjerrtësia e kordës nëpër P , Q :

$$\begin{aligned} m_{\text{sec}} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

- Pjerrtësia e tangjentës:

$$\begin{aligned} m_{\text{tan}} &= \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{sec}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Nocioni i derivatit të një funksioni

Derivati i një funksioni

- *Derivat* i një funksioni $f(x)$ sipas x quhet funksioni $f'(x)$ i dhënë me

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

kurse procesi i llogaritjes së derivatit quhet *diferencim* (ose *derivim*).

- Themi se $f(x)$ është *i diferencueshëm* (ose *i derivueshëm*) në x_0 në qoftë se ekziston $f'(x_0)$.

Derivati. Pjerrtësia. Shpejtësia e çastit

Pjerrtësia. Shpejtësia e çastit

- **Pjerrtësia** e tangjentës së lakores $f(x)$ në pikën $(x_0, f(x_0))$ jepet me $m_{\text{tan}} = f'(x_0)$.
- Shpejtësia e çastit e ndryshimit të madhësisë $f(x)$ sipas x kur $x = x_0$ është e barabartë me $f'(x_0)$.

Shembull ekuacioni tangjente të një grafiku

Shembull

Llogaritni derivatin e funksionit $f(x) = x^2$,
pastaj shfrytëzoni rezultatin për të gjetur pjerrtësinë e lakores
në pikën $x = -1$.
Cili është ekuacioni i tangjentës në këtë pikë?

Shembull ekuacioni tangjente të një grafiku. (Vazhdim)

Zgjidhje...

Sipas përkufizimit të derivatit

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.\end{aligned}$$

Pjerrtësia e tangjentës së lakores $y = x^2$ në pikën $x = -1$:

$$f'(-1) = 2(-1) = -2$$



Grafiku i funksionit $y = x^2$

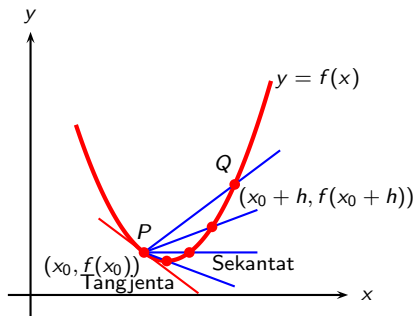


Figura: Tangjenta e lakores $y = x^2$ në pikën $(-1, 1)$.

Shembull ekuacioni tangjente të një grafiku. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

Gjejmë y -koordinatën e pikës nga e cila është tërhequr tangjenta:

$$y = f(-1) = (-1)^2 = 1.$$

Pra, tangjenta kalon nëpër pikën $(-1, 1)$ dhe ka pjerrtësinë -2 .
Ekuacioni i saj:

$$\begin{aligned}y - 1 &= (-2)[x - (-1)] \\y &= -2x - 1.\end{aligned}$$



Shembull aplikacioni biznesi

Shembull

Një prodhues vlerëson se kur prodhohen dhe shiten x njësi të një prodhimi të ardhurat e nxjerra do të jenë $R(x) = 0.5x^2 + 3x - 2$ mijë euro.

Me çfarë shpejtësie ndryshojnë të ardhurat sipas nivelit të prodhimit x kur prodhohen 3 njësi? A janë rritëse apo zvogëluese të ardhurat në këtë moment?

Shembull aplikacioni biznesi. (Vazhdim)

Zgjidhje...

Për $x \geq 0$, *koeficienti i diferencës* së $R(x)$ është

$$\begin{aligned} & \frac{R(x+h) - R(x)}{h} \\ &= \frac{[0.5(x+h)^2 + 3(x+h) - 2] - [0.5x^2 + 3x - 2]}{h} \\ &= \frac{[0.5(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h - 2] - 0.5x^2 - 3x + 2}{h} \\ &= \frac{xh + 0.5h^2 + 3h}{h} = x + 0.5h + 3. \end{aligned}$$



Shembull aplikacioni biznesi. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

Prandaj, derivati i $R(x)$ është

$$R'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (x + 0.5h + 3) = x + 3,$$

dhe meqë

$$R'(3) = 3 + 3 = 6,$$

rrjedh se të ardhurat ndryshojnë me shpejtësi 6,000 € për njësi kur prodhohen 3 njësi.

Meqë $R'(3) = 6 > 0$, pra meqë $R'(3)$ është **pozitiv**, tangjenta në pikën e grafikut të funksionit të të ardhurave për $x = 3$ duhet të jetë me pjerrtësi përpjetëze.

Vështrimi i tillë na sygjeron se të ardhurat janë rritëse kur $x = 3$. □

Grafiku i funksionit të të ardhurave

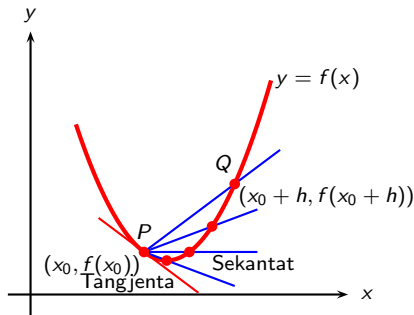


Figura: Grafiku i lakores $R(x) = 0.5x^2 + 3x - 2$, për $x \geq 0$, me tangjentën në pikën $x = 3$.

Simbolika e shënimit të derivatit

- Derivati $f'(x)$ i $y = f(x)$ ndonjëherë shënohet me $\frac{dy}{dx}$, kurse vlera e derivatit në $x = c$ (d.m.th., $f'(c)$):

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=c}.$$

- Për shembull, në qoftë se $y = x^2$, atëherë

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

- Ndonjëherë fjalia e formës

$$\text{„në qoftë se } y = x^2, \text{ atëherë } \frac{dy}{dx} = 2x\text{“}$$

shkurtohet duke shënuar, thjesht,

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

Derivueshmëria dhe vazhdueshmëria e një funksioni

- Nëse një funksion është i derivueshëm në një pikë $P(x_0, f(x_0))$, atëherë grafiku i tij ka tangjentë jovertikale në pikën P , të cilës i „ofrohen“ të gjitha pikat e grafikut në „afërsi“ të P .
- Intuitivisht, një gjë e tillë sygjeron se një funksion duhet të jetë i vazhdueshëm në çdo pikë ku është i derivueshëm, meqë grafiku nuk mund të ketë „vrimë“ ose „këputje“ në ndonjë pikë ku mund të tërhiqet tangjenta.
- Mirëpo, e anasjellta nuk është e vërtetë; d.m.th., një funksion i vazhdueshëm nuk është e thënë të jetë edhe i derivueshëm.

Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://fberisha.netfirms.com>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 153–161.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences*, fq. 98–109.

Përfundim

- Ekuivalenca e konceptit të derivatit të një funksioni me pjerrtësinë e grafikut dhe shpejtësinë e ndryshimit të funksionit.
- Lidhmërisë ndërmjet parashenjës së derivatit të një funksioni dhe rritjes ose zvogëlimit të tij.
- Simbolika e shënimit të derivatit:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$
$$f'(c) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=c}.$$