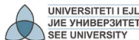


Teknika derivimi

F. M. Berisha



Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Përvetësimi i teknikave të derivimit
- Zbatimi i teknikave të përvetësuara për të derivuar një polinom
- Zbatimi në një aplikacion ekonomiksi

Përmbajtja

- 1 Derivati i një funksioni konstant
 - Rregulla e konstantës
 - Shembull
- 2 Derivati i një funksioni fuqi
 - Rregulla e fuqisë
 - Shembuj zbatimi të rregullës së fuqisë
- 3 Derivatet e prodhimit me konstantë dhe shumës
 - Rregulla e faktorit konstant
 - Rregullat e shumës dhe e ndryshimit
 - Derivati i një polinomi
- 4 Shpejtësia procentuale e ndryshimit të një funksioni

Derivati i një funksioni konstant

Rregulla e konstantës

Për çfarëdo konstante c ,

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

D.m.th., derivati i një konstanteje është zero.

Grafiku i funksionit $y = x^2$

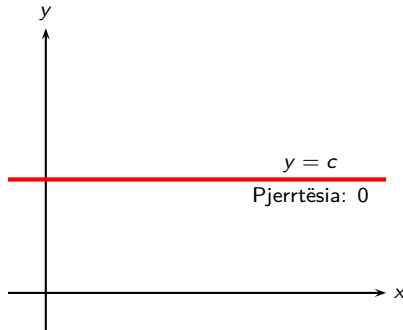


Figura: Grafiku i $f(x) = c$.

Shembull

Shembull

Gjeni derivatin e funksionit $f(x) = -5$.

Zgjidhje.

Kemi

$$\frac{d}{dx}(-5) = 0.$$



Derivati i një funksioni fuqi

Rregulla e fuqisë

Për çdo numër real n ,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Me fjalë, për të gjetur **derivatin** e x^n ,
zvogëlo për 1 eksponentin n të x
dhe **shumëzo me eksponentin fillestar**.

Shembuj zbatimi të rregullës së fuqisë

Shembull

Gjeni

① $\frac{d}{dx}(x^5)$

② $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

③ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Zgjidhje...

①

$$\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$$



Shembuj zbatimi të rregullës së fuqisë. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

2

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$



Derivati i prodhimit me konstantë

Rregulla e faktorit konstant

Në qoftë se c është konstantë dhe $f(x)$ është funksion i derivueshëm, atëherë i tillë është edhe $cf(x)$ dhe

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}[f(x)].$$

D.m.th., derivati i një prodhimi me konstantë është prodhimi i derivatit me konstantën.

Shembuj zbatimi të rregullës së faktorit konstant

Shembull

Gjeni

- 1 $\frac{d}{dx}(5x^4)$
- 2 $\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

Zgjidhje...

1

$$\frac{d}{dx}(5x^4) = 5 \frac{d}{dx}(x^4) = 5(4x^3) = 20x^3$$



Shembuj zbatimi të rregullës së faktorit konstant. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

2

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(-3x^{-1/2}\right) = -3\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = \frac{3}{2}x^{-3/2}$$



Derivatet e shumës dhe ndryshimit të funksioneve

Rregullat e shumës dhe e ndryshimit

Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione të derivueshme, atëherë të tillë janë edhe shuma dhe ndryshimi i tyre, dhe

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)], \\ \frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] &= \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)];\end{aligned}$$

d.m.th.,

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{dhe} \quad (f - g)' = f' - g'$$

Me fjalë, derivati i një shume ose ndryshimi është shuma ose ndryshimi i derivateve.

Shembuj zbatimesh të rregullave të shumës dhe ndryshimit

Shembull

Gjeni

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dx}(x^{-3} + 5)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dx}(2x^7 - 3x^{-5})$$

Zgjidhje...

$\textcircled{1}$

$$\frac{d}{dx}(x^{-3} + 5) = \frac{d}{dx}(x^{-3}) + \frac{d}{dx}(5) = -3x^{-4} + 0 = -3x^{-4},$$



Shembuj zbatimesh të rregullave të shumës dhe ndryshimit. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

2

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^7 - 3x^{-5}) &= 2\frac{d}{dx}(x^7) - 3\frac{d}{dx}(x^{-5}) \\ &= 2(7x^6) - 3(-5x^{-6}) = 14x^6 + 15x^{-6}.\end{aligned}$$



Derivati i një polinomi

Shembull

Gjeni derivatin e polinomit

$$y = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7.$$

Zgjidhje.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(4x^3 - 5x^2 + 8x - 7) \\ &= 4\frac{d}{dx}(x^3) - 5\frac{d}{dx}(x^2) + 8\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(-7) \\ &= 12x^2 - 10x^1 + 8x^0 + 0 = 12x^2 - 10x + 8.\end{aligned}$$



Shpejtësia procentuale e ndryshimit të një funksioni



$$\left[\begin{array}{l} \text{shpejtësia procentuale} \\ \text{e ndryshimit të } Q \end{array} \right]$$

$$= 100 \frac{\text{shpejtësia e ndryshimit të } Q}{\text{madhësia e } Q} = 100 \frac{Q'(x)}{Q(x)}.$$

- Shpejtësia procentuale e ndryshimit vjetor prej 200 € në pagë
 - për një person që fiton 100,000 € në vit:

$$100 \cdot \frac{200}{100,000} = 0.2$$

- për një person që fiton 1,000 € në vit:

$$100 \cdot \frac{200}{1,000} = 20$$

Një aplikacion ekonomiksi

Shembull

Bruto produkti vendor (GDP) i një vendi ishte

$$N(t) = t^2 + 2t + 50$$

qind milion euro t vite pas 2000.

- 1 Me çfarë shpejtësie ndryshon sipas kohës GDP në vitin 2005?
- 2 Me çfarë shpejtësie procentuale ndryshon sipas kohës GDP në vitin 2005?

Një aplikacion ekonomiksi. (Vazhdim)

Zgjidhje...

- 1 Shpejtësia e ndryshimit të GDP është derivati

$$N'(t) = 2t + 2.$$

Shpejtësia e ndryshimit në vitin 2005 është

$$N'(5) = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

qind milion euro në vit.



Një aplikacion ekonomiksi. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

- ② Shpejtësia procentuale e ndryshimit të GDP në vitin 2005 është

$$100 \frac{N'(5)}{N(5)} = 100 \frac{12}{5^2 + 2 \cdot 5 + 50} = 100 \cdot \frac{12}{85} \approx 14.1;$$

pra, përafërsisht 14.1% në vit.



Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://fberisha.netfirms.com>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 161–167.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences*, fq. 109–122.

Përfundim

- Teknikat e derivimit:
 - Rregulla e konstantës
 - Rregulla e fuqisë
 - Rregulla e faktorit konstant
 - Rregullat e shumë dhe ndryshimit
- Derivimi i një polinomi
- Shpejtësia procentuale e ndryshimit të një funksioni