

Shumëzimi i matricave. Matrica inverse

F. M. Berisha, N. Berisha



Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Zgjidhja e një sistemi më tepër ekuacionesh lineare me metodën e eliminimit të Gauss-it.
- Zgjerimi i veprimeve me matrica me dy operacione të reja: prodhimi skalar dhe prodhimi matricor.
- Nxënja e nocioneve të matricës identike, matricës josingulare, matricës inverse dhe matricës së adjunguar.

Përmbajtja

- 1 Metoda e eliminimit e Gauss-it
- 2 Prodhimi skalar dhe prodhimi matricor
- 3 Matrica identike dhe matrica inverse

Metoda e eliminimit e Gauss-it

Shembull

Zgjidhni sistemin

$$\boxed{x_1} + x_2 + 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

Zgjidhje....

Përkrahjmë ekuacionin e parë,
shumëzojmë ekuacionin e parë me 2 dhe e zbrisim nga i dyti,
shumëzojmë të parin me 3 dhe e zbrisim nga i treti,
i mbledhim të parin ekuacionit të katërtë.



Metoda e eliminimit e Gauss-it. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$$

$$(E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3)$$

$$(E_4 + E_1) \rightarrow (E_4)$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & x_2 & & + 3x_4 = & 4 \\ & \boxed{-x_2} & - & x_3 - 5x_4 = & -7 \\ & -4x_2 & - & x_3 - 7x_4 = & -15 \\ & 3x_2 + & 3x_3 + 2x_4 = & 8. \end{array}$$



Metoda e eliminimit e Gauss-it. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$(E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3)$$

$$(E_4 + 3E_2) \rightarrow (E_4)$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & x_2 & & + & 3x_4 = & 4 \\ & -x_2 - & x_3 - & 5x_4 = & -7 \\ & & + & 3x_3 + & 13x_4 = & 13 \\ & & & - & 13x_4 = & -13. \end{array}$$



Metoda e eliminimit e Gauss-it. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

Sistemin e fundit mund ta zgjidhim *me zëvendësim nga prapa*:

$$x_4 = \frac{-13}{-13} = 1$$

$$x_3 = \frac{13 - 13x_4}{3} = \frac{1}{3}(13 - 13 \cdot 1) = 0$$

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 \cdot 1 + 0) = 2$$

$$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1.$$



Metoda e eliminimit e Gauss-it. (Vazhdim)

Mbani mend!

Edhe më lehtë, pa i shënuar fare ndryshoret e ekuacioneve, metodën do të mund ta zbatonim duke e aplikuar në *matricën e zgjeruar të sistemit*, e cila përbëhet nga matrica e koeficientëve të sistemit, të cilës i përshkruhet nga e djathta shtylla e lirë. Pastaj veprimet kryhen mbi elementët e kësaj matrice.

Prodhimi skalar

Prodhimi me një skalar

Në qoftë se k është një numër (ose, *skalar*), atëherë *prodhimi skalar* i skalarit k me një matricë A është matrica B e rendit të njëjtë sikur A , elementet e së cilës janë të barabartë me prodhimin e elementëve përkatës të A me k ; pra, $B = kA = [b_{ij}]$, ku $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Prodhiimi skalar. (Vazhdim)

Shembull

Shumëzoni skalarisht matricën

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

me numrin 5.

Zgjidhje....

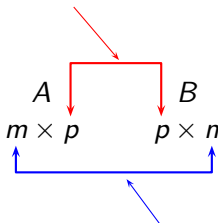
$$kA = 5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 15 & -20 \end{bmatrix}.$$



Prodhimi matricor

Në qoftë se matrica A është e rendit $m \times p$,
kurse matrica B e rendit $p \times n$,
atëherë prodhimi $A \cdot B$ do të jetë matricë e rendit $m \times n$

Tregon se A mund të shumëzohet me B



Tregon dimensionin e prodhimit $A \cdot B$

Prodhimi matricor. (Vazhdim)

Prodhimi matricor

Në qoftë se A është një matricë e rendit $m \times p$
dhe B është një matricë e rendit $p \times n$,
atëherë **prodhimi matricor** i matricës A me B
është matrica C e rendit $m \times n$,
elementet e së cilës janë të barabarta me shumën
e prodhimeve të elementeve të një rreshti të A
me elementet përkatëse të një shtylle të B ;
pra, $C = AB = [c_{ij}]$, ku

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}.$$

Prodhimi matricor. (Vazhdim)

Shembull

Le të jenë

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llogaritni prodhimin AB .

Prodhiimi matricor. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Meqë dimensionet e matricave A e B janë 3×3 dhe 3×3 , atëherë është i mundur prodhiimi AB , dhe rezultati do të jetë matricë 3×3 :

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 11 \\ -13 & 2 & -13 \end{bmatrix}.$$



Matrica identike

Matricë identike

Matricë identike / është një matricë katrore e cila i ka të gjitha elementet e diagonales të barabartë me 1, kurse të gjithë elementet tjerë të barabartë me 0.

Shembuj matricash identike

Shembull

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica identike. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni prodhimin e një matrice katrore të rendit 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

me matricën identike I të rendit 2×2 . Gjeni pastaj prodhimin IA .

Matrica identike. (Vazhdim)

Zgjidhje.

$$\begin{aligned} AI &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$



Matrica identike. (Vazhdim)

Vetia e matricave identike

Mund të vërtetohet se për çdo matricë A dhe matricë identike I për të cilën ekziston prodhimi AI ose IA vlen

$$AI = A \quad \text{and} \quad IA = A.$$

Matrica inverse

Matrica inverse

- Për matricë katrore A të rendit n themi se është *josingulare* në qoftë se $\det A \neq 0$.
- Në qoftë se A është një matricë josingulare, atëherë *matrica inverse* e A , e shënojmë me A^{-1} , quhet matrica e tillë që

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Matrica inverse. (Vazhdim)

Matrica inverse

Në qoftë se A është një matricë josingulare,
atëherë matrica e saj inverse A^{-1} është

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A,$$

ku $\text{adj } A$ është *matrica e adjunguar* e matricës A ,
e cila përbëhet nga kofaktorët sipas rreshtave të elementëve të A
të rradhitur sipas shtyllave:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrica inverse. (Vazhdim)

Sistemi i ekuacioneve lineare në trjathë matricore...

Sistemi i ekuacioneve lineare

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n,$$

mund të shkruhet si barazim matricor

$$AX = B,$$

ku A është matrica e sistemit, X është shtylla e të panjohurave, kurse B është shtylla e lirë;

Matrica inverse. (Vazhdim)

...Sistemi i ekuacioneve lineare në trjtë matricore

d.m.th.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Matrica inverse. (Vazhdim)

Zgjidhja e një sistemi me anë të matricës inverse

$$X = A^{-1}B$$

është zgjidhja e ekuacionit matricor të sistemit.

Vërtet,

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B.$$

Matrica inverse. (Vazhdim)

Mbani mend!

- Llogaritja e matricës inverse kërkon numër të madh veprimesh, prandaj është e papërshtatshme për t'u zbatuar në praktikë.
- Në rastin e përgjithshëm, metoda më e përshtatshme për zgjidhjen e një sistemi ekuacionesh lineare është metoda e Gauss-it.

Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://www.fberisha.org>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 28–40.

Përfundim

- Teknika e zgjidhjes së një sistemi ekuacionesh lineare me metodën e Gauss-it
- Llogaritja e prodhimit të një matrice me një skalar dhe me një matricë
- Kuptimi i lidhmërisë ndërmjet një sistemi ekuacionesh lineare dhe ekuacionit matricor të tij