UNIVERSITETI I PRISHTINËS

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

Faton Berisha

ZBATIMI I MODULEVE TË PËRGJITHËSUARA TË LËMUESHMËRISË NË PËRAFRIMIN E FUNKSIONEVE ME POLINOME ALGJEBRIKE NË METRIKËN ME PESHË TË JACOBI-T

(Disertacion i doktoratës)

PRISHTINË 1998

UNIVERSITETI I PRISHTINËS

FAKULTETI I SHKENCAVE
MATEMATIKE-NATYRORE

ZBATIMI I MODULEVE TË PËRGJITHËSUARA TË LËMUESHMËRISË NË PËRAFRIMIN E FUNKSIONEVE ME POLINOME ALGJEBRIKE NË METRIKËN ME PESHË TË JACOBI-T

(Disertacion i doktoratës)

APPLYING THE GENERALISED MODULI OF SMOOTHNESS TO APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS IN WEIGHTED JACOBI METRICS

(PhD Thesis)

Kandidati:
mr. sci. Faton Berisha

Mentori:
dr. sci. Fevzi Berisha, prof. inordinar

PRISHTINË 1998

Parathënie

Në këtë punim disertacioni është sublimuar puna disavjeçare në lëmin e teorisë së përafrimeve. Përcaktimi i ngushtë i problemit dhe rezultatet e paraqitura janë arritur gjatë qëndrimit gjashtëmujor për specializim pranë Katedrës së teorisë së funksioneve dhe analizës funksionale në Fakultetin Mekaniko–matematik të Universitetit shtetëror "Lomonosov" të Moskës. Me këtë rast falenderoj përzemërsisht udhëheqësin e specializimit, profesorin dr. sci. Mikhail Konstantinovich Potapov për parashtrim të problemit, përkrahje, bashkëpunim dhe interesim të përhershëm për mirëvajtien e punës.

Shfrytëzoj rastin të falenderoj babain dhe profesorin tim, akademik Muharrem Berishën, këshillat dhe udhëzimet e të cilit përherë ishin udhërrëfyese të miat. Atij edhe ia kushtoj këtë punim.

Gjithashtu falenderoj mentorin, dr. sci. Fevzi Berishën, vërejtjet dhe sygjerimet e të cilit kontribuan në formësimin përfundimtar të punimit. Për lexim të kujdesshëm dhe vërejtje, të cilat kontribuan në evitimin e gabimeve në dorëshkrim, falenderoj dr. sci. Ramadan Zejnullahun.

Autori

Përmbajtja

Hyrje

Njëra nga detyrat themelore të teorisë së përafrimeve konsiston në gjetjen e lidhmërisë ndërmjet karakteristikave strukturale të funksionit (derivueshmëria, kushti Lipschitz, vetitë e modulit të lëmueshmërisë etj.) dhe karakteristikave konstruktive të tij (rendit të tentimit në zero të vargut të përafrimeve më të mira të tij me polinome trigonometrike ose algjebrike).

Rezultatet e para në këtë drejtim lajmërohen nga fillimi i shekullit në punimet e J. de la Vallée-Poussin [1], H. Lebesgue [2], S. N. Bernshteĭn [3], [4] dhe D. Jackson [5]. Në këto punime, për funksionet e vazhdueshme 2π-periodike janë vërtetuar teorema direkte dhe ajo e anasjelltë në teorinë e përafrimeve për modulin e vazhdueshmërisë. Konkretisht, është vërtetuar se kushti $f(x) \in \operatorname{Lip}\lambda$, $0 < \lambda < 1$, është ekuivalent me kushtin $E_n^*(f) \le Cn^{-\lambda}$, ku $E_n^*(f)$ është përafrimi më i mirë me polinome trigonomtrike të shkallës jo më të madhe se $n-1$.

Gjithashtu, për funksionin e vazhdueshëm 2π-periodik është vërtetuar (shih p.sh. [6]) teorema e Jackson-it dhe teorema e anasjelltë me të për modulin e lëmueshmërisë të rendit r:

$$C_1 E_n^*(f) \le \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) \le \frac{C_2}{n^r}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{r-1} E_\nu^*(f),$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta pozitive të cilat nuk varen nga f dhe n ($n = 1, 2, \ldots$).

Po atëherë është zbuluar dallimi esencial ndërmjet rastit periodik dhe atij joperiodik. Kështu, është vërtetuar se në qoftë se $f(x)$ është funksion i vazhdueshëm joperiodik në segmentin $[a, b]$, kurse $E_n(f)$ përafrimi më i mirë i funksionit $f(x)$ në $[a, b]$ me polinome algjebrike të shkallës jo më të madhe se $n-1$, atëherë

1) në qoftë se $f(x) \in \operatorname{Lip}\lambda$, $0 < \lambda < 1$, në tërë segmentin $[a, b]$, atëherë $E_n(f) \le Cn^{-\lambda}$;

2) në qoftë se $E_n(f) \le Cn^{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, atëherë $f(x) \in \operatorname{Lip}\lambda$ vetëm në çdo segment $[c, d] \subset (a, b)$.

Pra, për funksionet 2π-periodike kushti $E_n^*(f) \le Cn^{-\lambda}$ mundëson përshkrimin konstruktiv të klasës së funksioneve që plotësojnë kushtin Lipschitz në tërë periodën, kurse për funksionet joperiodike kushti analog $E_n(f) \le Cn^{-\lambda}$ nuk jep karakteristikën konstruktive të klasës së funksioneve që plotësojnë kushtin Lipschitz në tërë segmentin $[a, b]$. Prandaj shtrohen dy pyetje

1. Çfarë është karakteristikë konstruktive e klasës së funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin Lipschitz?

2. Çfarë është karakteristikë strukturale e klasës së funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin $E_n(f) \leq Cn^{-\lambda}$?

Pyetja mbi karakteristikën konstruktive të funksioneve joperiodike $f(x) \in \operatorname{Lip}\lambda$ mbeti e hapur për një kohë të gjatë. Vetëm në vitin 1946 S. M. Nikol's-kiĭ [7] ka vërtetuar se në qoftë se $f(x) \in \operatorname{Lip} 1$ në segmentin $[-1, 1]$, atëherë për çdo n ekziston polinomi algjebrik $P_n(x)$ i shkallës jo më të madhe se $n-1$ i tillë që

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n-1} + |x| O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Ky rezultat tregon se funksioni $f(x) \in \operatorname{Lip} 1$ lejon përafrim më të mirë në skaje të segmentit sesa në pikat e brendshme.

Vrojtimi i tillë edhe shërbeu si bazë për hipotezën e dhënë nga S. M. Nikol'skiĭ se karakteristika konstruktive e funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin Lipschitz në ndonjë segment të fundëm varet nga pozita e pikës në segment. Kjo hipotezë u vërtetua në punimet e A. F. Timan-it [8] dhe V. K. Dzyadyk-ut [9], në të cilat u fitua karakteristika konstruktive e klasës $\operatorname{Lip}\lambda$, d.m.th. u dha përgjegje në pyetjen 1. Ata treguan se kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni i vazhdueshëm $f(x)$ t'i takojë klasës $\operatorname{Lip}\lambda$, $0 < \lambda < 1$, në tërë segmentin $[-1, 1]$, është që për çdo n të ekzistojë polinomi algjebrik $P_n(x)$ i shkallës jo më të madhe se $n - 1$ i tillë që

$$\max_{-1\leq x\leq 1} \frac{|f(x) - P_n(x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\lambda}} \leq Cn^{-\lambda}.$$

Në këtë mënyrë është dhënë përgjegjja në pyetjen 1.

Për rastin e funksioneve 2π-periodike, krahas rastit të metrikës uniforme është studiuar qështja e lidhmërisë së karakteristikave strukturale dhe rendit të zvogëlimit të përafrimeve më të mira të tyre me polinome trigonometrike në metrikën integrale L_p, $1 \leq p < \infty$. Janë vërtetuar teorema direkte dhe e anasjelltë në teorinë e përafrimeve për rastin e funksioneve nga klasa $\operatorname{Lip}\lambda$, pastaj teorema e Jackson-it dhe teorema e anasjelltë me të, si për modulin e vazhdueshmërisë, ashtu edhe për modulet e lëmueshmërisë të rendeve të larta.

Prandaj në mënyrë të natyrshme u shtrua pyetja: A paraqet kushti

$$\left\{\int_{-1}^{1} \left|\frac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\lambda}}\right|^p dx\right\}^{1/p} \leq Cn^{-\lambda} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

karakteristikën konstruktive të klasës së funksioneve joperiodike që plotësojnë kushtin Lipschitz në metrikën L_p, $1 \leq p < \infty$? Përgjegjja në këtë pyetje është dhënë nga V. P. Motornyĭ [10]. Duke zbatuar rezultatet e V. K. Lebed'-it [11] dhe M. K. Potapov-it [12], [13], ai ka vërtetuar se kushti i mësipërm nuk paraqet karakteristikë konstruktive të klasës $\operatorname{Lip}(\lambda, p)$.

Prandaj u shtruan pyetjet:

3. Çfarë është karakteristikë konstruktive e klasës së funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin Lipschitz në metrikën L_p, $1 \leq p < \infty$?

4. Çfarë është karakteristikë strukturale e klasës së funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin $E_n(f)_p \leq Cn^{-\lambda}$, $1 \leq p < \infty$?

Pyetja 3. deri më ditët e sotme mbetet ende e hapur. Pyetjet 2. dhe 4. paraqesin raste të veçanta të pyetjes më të përgjithshme:

5. Çfarë është karakteristikë strukturale e klasës së funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin: për çdo n ekiston polinomi algjebrik $P_n(x)$ i shkallës jo më të madhe se $n-1$ i tillë që

$$\left\|(f(x)-P_n(x))\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right\|_p \le Cn^{-\lambda}, \qquad 1\le p\le\infty?$$

Me fjalë tjera, në rastin e funksioneve joperiodike nuk është e mundur të jepen rezultate analoge me teoremën direkte dhe atë të anasjelltë në teorinë e përafrimeve, e rrjedhimisht, as me teoremën e Jackson-it dhe teoremën e anasjelltë me të. Kështu, duke filluar nga vitet e 80-ta, zgjidhja e këtij problemi të teorisë së përafrimeve kërkohet sipas nje ideje të re. Është treguar se kanë vend pohime analoge me rastin 2π–periodik, d.m.th. vlejnë teorema direkte dhe e anasjelltë në teorinë e përafrimeve, e së bashku me to edhe teorema e Jackson-it dhe teorema e anasjelltë me të për funksionet joperiodike në qoftë se moduli i zakonshëm i lëmueshmërisë zëvendësohet me ndonjë modul të përgjithësuar të lëmueshmërisë (shih [14]).

Module të tilla të pergjithësuar janë përkufizuar në mënyra të ndryshme, p.sh. nga S. Pawelke [15], K. G. Ivanov [16, 17], P. L. Butzer, R. L. Stens dhe M. Weherens [18], Z. Ditzian dhe V. Totik [14, f. 381–386], M. Q. Berisha, M. K. Potapov dhe F. H. Berisha [19].

Një qasje tjetër në përgjithësimin e modulit të lëmueshmërisë ka të bëjë me analogjinë vijuese me rastin 2π–periodik.

Në qoftë se shqyrtohet funksioni 2π–periodik f, atëherë në çdo pikë x funksionit f i korrespondon seria e tij Fourier sipas sistemit trigonometrik:

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}.$$

Kështu në pikën x funksionit $f(x+y)$ – operatorit të translacionit të zakonshëm i korrespondon seria Fourier

$$S_y(f,x)=f(x+y)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}e^{iny}.$$

Tani, në qoftë se shqyrtohet funksioni joperiodik i përkufizuar në segmentin $[-1,1]$, atëherë funksionit f i korrespondon seria Fourier–Jacobi sipas sistemit të polinomeve Jacobi ortogonale në segmentin $[-1,1]$ me peshë $(1-x)^{\nu}(1+x)^{\mu}$:

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n^{(\nu,\mu)}(x).$$

Prandaj, sipas analogjisë është e natyrshme që për operator të translacionit të përgjithësuar $\bar{S}_y(f,x,\nu,\mu)$ të merret funksioni seria Fourier–Jacobi e të cilit në pikën x është

$$\bar{S}_y(f,x,\nu,\mu)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n^{(\nu,\mu)}(x)P_n^{(\nu,\mu)}(y).$$

Duke përkufizuar modulin e përgjithësuar të lëmueshmërisë me anë të operatorit të translacionit të përgjithësuar sipas kësaj metode, M. K. Potapov [20], [21] ka arritur të jep përgjegje në pyetjen 5., të parashtruar më sipër. Gjithashtu, për këto module të përgjithësuara të lëmueshmërisë M. K. Potapov [22] dhe M. K. Potapov e V. M. Fedorov [23] kanë vërtetuar teoremën e Jackson-it dhe teoremën e anasjelltë me të.

Karakteristikë e të gjitha këtyre përgjithësimeve të moduleve të lëmueshmërisë është se operatori përkatës i translacionit të përgjithësuar është simetrik sipas x dhe y. Në vitin 1997 M. K. Potapov [24, 25, 26] jep hipotezën se një përgjithësim i tillë i modulit të lëmueshmërisë mund të arrihet edhe me anë të operatorëve josimetrikë të translacionit të përgjithësuar.

Në këtë punim është trajtuar pikërisht qështja e zbatimit të modulit të lëmueshmërisë të përgjithësuar me anë të operatorit josimetrik të translacionit të përgjithësuar në zgjidhjen e problemeve të përmendura të teorisë së përafrimeve. Ideja e operatorit josimetrik të translacionit të përgjithësuar qëndron në përgjithësimin vijues të operatorit simetrik të translacionit të përgjithësuar.

Në qoftë se seria Fourier sipas ndonjë sistemit $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonal me peshë në segmentin $[-1, 1]$ e funksionit f, joperiodik në $[-1, 1]$, është

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

atëherë funksionin $\bar{T}_y(f, x, \Phi, \Psi)$ me seri Fourier

$$\bar{T}_y(f, x, \Phi, \Psi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

ku $\Psi = \{\psi_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ është ndonjë sistem funksionesh të përkufizuara në $[-1, 1]$, e konsiderojmë operator josimetrik të translacionit të përgjithësuar.

Në kapitullin I, për funksionin e dhënë f, joperiodik në segmentin $[-1, 1]$, në trajtë eksplicite janë dhënë operatorët josimetrikë të translacionit të përgjithësuar $T_y(f, x)$ dhe $\tau_y(f, x)$. Me anë të tyre është përgjithësuar diferenca e rendit r e funksionit f dhe janë përkufizuar modulet e përgjithësuara të lëmueshmërisë $\tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha,\beta}$ dhe $\hat{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha}$ të rendit r. Poashtu janë dhënë pohime ndihmëse të cilat zbatohen në kapitujt vijues. Veçohet rezultati i teoremës 1.2.1, i cili jep një mosbarazim karakteristik të tipit L_p me peshë.

Në kapitullin II janë dhënë përmes modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\tilde{\omega}_r(f, \delta)_{p,\alpha,\beta}$ karakteristikat strukturale të klasave të funksioneve f të cilat plotësojnë kushtin $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq Cn^{-2r-\lambda}$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Teorema 2.1.1, e vërtetuar në këtë kapitull, shqyrton kufizueshmërinë (në kuptim të operatorit linear) e operatorit $T_y(f, x)$. Në teoremën 2.2.1, për funksionin e dhënë f, me ndihmën e bërthamës së Jackson-it është ndërtuar polinomi algjebrik i cili i korrespondon operatorit $T_y(f, x)$. Teoremat 2.2.2 dhe 2.2.3 sigurojnë, nën konditat e caktuara, inkluzionin e klasës së funksioneve $H(p, \alpha, \beta, r, \lambda)$ në klasën $E(p, \alpha, \beta, \lambda)$ dhe anasjelltas. Teorema 2.2.4 mbi koincidencën e klasave, jep karakteristikën strukturale të klasës së funksioneve f të cilat plotësojnë kushtin $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq Cn^{-\lambda}$ dhe jep përgjegje në pyetjen 5. të parashtruar më sipër. Teorema 2.3.1 jep lidhmërinë e rendit të zvogëlimit të vargut të përafrimeve më të mira me polinome algjebrike të funksioneve f dhe $D^r_{x,\nu,\mu}(f)$. Në fund, teorema 2.3.2 jep përmes modulit $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ dhe operatorit të diferencimit $D_{x,\nu,\mu}(f)$ karakteristikën strukturale të klasave të funksioneve $E(p,\alpha,\beta,2r+\lambda)$.

Në kapitullin III është dhënë përmes modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$ karakteristika konstruktive e klasës së funksioneve $L_{p,\alpha,\beta}$. Teorema 3.1.1 shqyrton kufizueshmërinë (në kuptim të operatorit linear) e operartorit $\tau_y(f,x)$. Në teoremën 3.3.1 jepet ekuivalenca në kuptim të Landau-t e modulit $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$ me K–funksionelin e Petree-së $K_r(f,\delta)_{p,\alpha}$. Rezultatin kryesor në këtë kapitull paraqet teorema 3.3.2, në të cilën për modulin $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$ vërtetohen teorema e Jackson-it dhe teorema e anasjelltë me të.

Rezultatet kryesore të disertacionit janë dorëzuar për publikim në punimet [27, 28, 29, 30].

Kapitulli I

Pohime ndihmëse

§ 1.1. Përkufizimet

Në këtë pikë japim përkufizimet e nocioneve të cilat do të shqyrtohen në pikat vijuese. Për funksionin e shumueshëm f do të përkufizojmë operatorët josimetrikë të translacionit të përgjithësuar $T_y\,(f,x)$ dhe $\tau_y\,(f,x)$. Me anë të tyre do të përkufizojmë modulet e përgjithëuara të lëmueshmërisë $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$, përkatësisht $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$.

Shënojmë me $L_p[a,b]$ hapësirën e funksioneve f të tilla që për $1 \le p < \infty$ f është funksion i matshëm në segmentin $[a,b]$ dhe

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

kurse për $p = \infty$ f është funksion i vazhdueshëm në segmentin $[a,b]$ dhe

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

Në qoftë se është $[a,b] = [-1,1]$, atëherë në vend të $L_p[-1,1]$ do të shkruajmë thjesht L_p.

Me $L_{p,\alpha,\beta}$ shenojmë klasën e funksioneve f për të cilat vlen $f(x)(1-x)^\alpha \times (1+x)^\beta \in L_p$. Për $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ vejmë

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p.$$

Në veçanti, për $\alpha = \beta$ vejmë $L_{p,\alpha,\alpha} = L_{p,\alpha}$ dhe

$$\|f\|_{p,\alpha,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha}\,.$$

Me $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ shenojmë përafrimin më të mirë të funksionit $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ me anë të polinomeve algjebrike të shkallës jo më të madhe se $n-1$ në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$, d.m.th.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha,\beta}\,,$$

ku P_n është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$. Në veçanti, për $\alpha = \beta$ vejmë $E_n(f)_{p,\alpha,\alpha} = E_n(f)_{p,\alpha}$.

Shenojmë me $E(p,\alpha,\beta,\lambda)$ klasën e funksioneve $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ që plotësojnë kushtin

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le Cn^{-\lambda},$$

ku $\lambda > 0$ dhe C – ndonjë konstantë e cila nuk varet nga n ($n \in \mathbf{N}$).

Për funksionin e shumueshëm f përkufizojmë operatorin josimetrik të translacionit të përgjithësuar $\tilde{T}_t\,(f,x)$ me

$$\tilde{T}_t\,(f,x) = \frac{1}{\pi\,(1-x^2)} \times \int_0^\pi \left(1 - R^2 - 2\sin^2 t \sin^2 \varphi_1 + 4\left(1-x^2\right)\sin^2 t \sin^4 \varphi_1\right) f(R)\,d\varphi_1,$$

ku $R = x\cos t + \sqrt{1-x^2}\sin t\cos\varphi_1$.

Me anë të këtij operatori të translacionit të përgjithësuar përkufizojmë diferencën e përgjithësuar te rendit r me

$$\tilde{\Delta}_t^1\,(f,x) = \tilde{\Delta}_t\,(f,x) = \tilde{T}_t\,(f,x) - f(x),$$
$$\tilde{\Delta}_{t_1,\ldots,t_r}^r\,(f,x) = \tilde{\Delta}_{t_r}\left(\tilde{\Delta}_{t_1,\ldots,t_{r-1}}^{r-1}\,(f,x)\,,x\right) \qquad (r = 2,3,\ldots),$$

dhe, për funksionin $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, modulin e përgjithësuar të lëmueshmërisë të rendit r me

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{\substack{|t_j|\le\delta \\ j=1,2,\ldots,r}} \left\|\tilde{\Delta}_{t_1,\ldots,t_r}^r\,(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \qquad (r = 1,2,\ldots).$$

Shenojmë me $H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$ klasën e funksioneve $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ të cilat plotësojnë kushtin

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \le C\delta^\lambda,$$

ku $\lambda > 0$ dhe C – ndonjë konstantë e cila nuk varet nga δ.

Vejmë $y = \cos t$ dhe $z = -\cos\varphi_1$ në operatorin $\tilde{T}_t\,(f,x)$, e shënojmë atë me $T_y\,(f,x)$ dhe e shkruajmë në formën

$$T_y\,(f,x) = \frac{1}{\pi\,(1-x^2)} \int_{-1}^1 A_y(x,z,R) f(R) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

ku

$$\begin{aligned} &R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, \\ &A_y(x,z,R) \\ &\quad = 1 - R^2 - 2\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) + 4\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Përkufizojmë operatorin $T_{y_1,\ldots,y_r}^r\,(f,x)$ të translacionit të përgjithësuar të rendit r me

$$T_y^1\,(f,x) = T_y\,(f,x)\,,$$
$$T_{y_1,\ldots,y_r}^r\,(f,x) = T_{y_r}\left(T_{y_1,\ldots,y_{r-1}}^{r-1}\,(f,x)\,,x\right) \qquad (r = 2,3,\ldots).$$

Gjithashtu, për funksionin e shumueshëm f përkufizojmë edhe operatorin josimetrik të translacionit të përgjithësuar $\hat{\tau}_t\,(f,x)$ me

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_t\,(f,x) &= \frac{1}{\pi\,(1-x^2)\cos^4\frac{t}{2}} \\ &\times \int_0^\pi \left\{2\left(\sqrt{1-x^2}\cos t - x\sin t\cos\varphi_1 + \sqrt{1-x^2}(1-\cos t)\sin^2\varphi_1\right)^2\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \left(1-R^2\right)\right\} f(R)\,d\varphi_1,\end{aligned}$$

ku $R = x\cos t + \sqrt{1-x^2}\sin t\cos\varphi_1$.

Në mënyrë analoge sikur në rastin e operatorit $\tilde{T}_t\,(f,x)$, me anë të operatorit të translacionit të përgjithësuar $\hat{\tau}_t\,(f,x)$ përkufizojmë diferencën e përgjithësuar te rendit r me

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^1_t\,(f,x) &= \hat{\Delta}_t\,(f,x) = \hat{\tau}_t\,(f,x) - f(x), \\ \hat{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}\,(f,x) &= \hat{\Delta}_{t_r}\left(\hat{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}\,(f,x)\,,x\right) \qquad (r=2,3,\dots),\end{aligned}$$

dhe, për funksionin $f \in L_{p,\alpha}$, modulin e përgjithësuar të lëmueshmërisë të rendit r me

$$\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha} = \sup_{\substack{|t_j|\le\delta \\ j=1,2,\dots,r}} \left\|\hat{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}\,(f,x)\right\|_{p,\alpha} \qquad (r=1,2,\dots).$$

Në veçanti, për $t_1 = \cdots = t_r = t$ vejmë

$$\hat{\Delta}^r_{t,\dots,t}\,(f,x) = \hat{\Delta}^r_t\,(f,x)\,.$$

Vejmë $y = \cos t$ dhe $z = -\cos\varphi_1$ në operatorin $\hat{\tau}_t\,(f,x)$, e shënojmë atë me $\tau_y\,(f,x)$ dhe e shkruajmë në formën

$$\tau_y\,(f,x) = \frac{4}{\pi\,(1-x^2)\,(1+y)^2}\int_{-1}^1 B_y(x,z,R)f(R)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

ku R është dhënë në (1.1), kurse

$$\begin{aligned}&B_y(x,z,R) \\ &= 2\left(y\sqrt{1-x^2} - zx\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}(1-y)\left(1-z^2\right)\right)^2 - \left(1-R^2\right). \quad (1.2)\end{aligned}$$

Përkufizojmë opeatorin $\tau^r_{y_1,\dots,y_r}\,(f,x)$ të translacionit të përgjithësuar të rendit r me

$$\begin{aligned}\tau^1_y\,(f,x) &= \tau_y\,(f,x)\,, \\ \tau^r_{y_1,\dots,y_r}\,(f,x) &= \tau_{y_r}\left(\tau^{r-1}_{y_1,\dots,y_{r-1}}\,(f,x)\,,x\right) \qquad (r=2,3,\dots).\end{aligned}$$

Për $y_1 = \cdots = y_r = y$ vejmë

$$\tau^r_{y,\dots,y}\,(f,x) = \tau^r_y\,(f,x)\,.$$

Me $D_{x,\nu,\mu}$ shenojmë operatorin e diferencimit të dhënë me

$$D_{x,\nu,\mu}=\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}+(\mu-\nu-(\nu+\mu+2)x)\frac{d}{dx}.$$

Është evidente se

$$D_{x,\nu,\mu}=(1-x)^{-\nu}(1+x)^{-\mu}\frac{d}{dx}(1-x)^{\nu+1}(1+x)^{\mu+1}\frac{d}{dx}.$$

Shenojmë

$$\begin{aligned}&D^1_{x,\nu,\mu}f(x)=D_{x,\nu,\mu}f(x),\\&D^r_{x,\nu,\mu}f(x)=D_{x,\nu,\mu}\left(D^{r-1}_{x,\nu,\mu}f(x)\right)\qquad(r=1,2,\ldots).\end{aligned}$$

Themi se $f\in AD^r(p,\alpha,\beta)$ në qoftë se $f\in L_{p,\alpha,\beta}$, f ka derivat $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}f(x)$ të rendit $2r-1$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$ dhe[1] $D^l_{x,\nu,\mu}f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$ $(l=1,2,\ldots,r)$. Në veçanti, për $\alpha=\beta$ vejmë $AD^r(p,\alpha,\alpha)=AD^r(p,\alpha)$.

Me

$$K_r(f,\delta)_{p,\alpha}=\inf_{g\in AD^r(p,\alpha)}\left(\|f-g\|_{p,\alpha}+\delta^{2r}\left\|D^r_{x,2,2}g(x)\right\|_{p,\alpha}\right)$$

shenojmë K–funksionelin e Petree-së, interpolues ndërmjet hapësirave $L_{p,\alpha}$ dhe $AD^r(p,\alpha)$.

Për funskionin $f\in L_{1,2}$ shenojmë me $H\,(f,x)$ dhe $H_\delta\,(f,x)$ operatorët vijues

$$H\,(f,x)=-\int_0^x\left(1-y^2\right)^{-3}\int_y^1\left(1-z^2\right)^2\left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right)dz\,dy,$$

ku $c_1=\int_{-1}^1\left(1-z^2\right)^2f(z)\,dz$, $c_0=\int_{-1}^1\left(1-z^2\right)^2\,dz$; dhe

$$\begin{aligned}H_\delta\,(f,x)=\frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}&\\\times\int_0^v\hat{\tau}_u\,(f,x)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv,&\end{aligned}$$

ku

$$\varkappa(\delta)=\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_0^v\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv.$$

Përkufizojmë fuqinë e r-të të operatorit H me

$$\begin{aligned}&H^1\,(f,x)=H\,(f,x)\,,\\&H^r\,(f,x)=H\left(H^{r-1}\,(f,x)\,,x\right)\\&=-\int_0^x\left(1-y^2\right)^{-3}\int_y^1\left(1-z^2\right)^2\left(H^{r-1}\,(f,z)-\frac{c_r}{c_0}\right)dz\,dy\qquad(r=2,3,\ldots),\end{aligned}$$

[1]Është evidente se klasa $AD^r(p,\alpha,\beta)$ nuk varet nga zgjedhja e numrave ν dhe μ.

ku $c_r = \int_{-1}^{1} \left(1-z^2\right)^2 H^{r-1}\left(f,z\right) dz$, $(r=2,3,\ldots)$; dhe fuqinë e r-të të operatorit H_δ me

$$\begin{aligned} H_\delta^1\left(f,x\right) &= H_\delta\left(f,x\right), \\ H_\delta^r\left(f,x\right) &= H_\delta\left(H_\delta^{r-1}\left(f,x\right),x\right) \qquad (r=2,3,\ldots). \end{aligned}$$

Me $P_n^{(\nu,\mu)}(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ shenojmë polinomet e Jacobi-t, d.m.th. polinomet algjebrike të shkallës jo më të madhe se n, ortogonale ndërmjet vedi me peshë $(1-x)^\nu(1+x)^\mu$ në segmentin $[-1,1]$ dhe të normuara sipas kushtit[2] $P_n^{(\nu,\mu)}(1)=1$ $(n=0,1,\ldots)$.

Shenojmë me $a_n(f)$ koeficientët Fourier–Jacobi të funksionit $f\in L_{1,2}$ sipas sistemit të polinomeve të Jacobi-t $\left\{P_n^{(2,2)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$, d.m.th.

$$a_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{(2,2)}(x) \left(1-x^2\right)^2 dx \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Përkufizojmë operatorët vijues simetrik të translacionit të përgjithësuar, të cilët në vazhdim do të kenë rol ndihmës:

1) për $\nu=\mu=-\frac{1}{2}$

$$S_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{2}\left(f(Q_{x,t,1,1}) - f(Q_{x,-t,1,1})\right);$$

2) për $\nu=\mu>-\frac{1}{2}$

$$S_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^{1} f(Q_{x,t,z,1}) \left(1-z^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dz;$$

3) për $\nu>\mu=-\frac{1}{2}$

$$S_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^{1} f(Q_{x,t,1,z}) \left(1-z^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dz;$$

4) për $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &S_t(f,x,\nu,\mu) \\ &= \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \int_0^1 \int_{-1}^{1} f(Q_{x,t,z,u}) \left(1-z^2\right)^{\nu-\mu-1} z^{2\mu+1} \left(1-u^2\right)^{\mu-\frac{1}{2}} du\, dz, \end{aligned}$$

ku

$$\begin{aligned} Q_{x,t,z,u} &= x\cos t + zu\sqrt{1-x^2}\sin t - \left(1-u^2\right)(1-x)\sin^2\frac{t}{2}, \\ \gamma(\nu) &= \int_{-1}^{1} \left(1-z^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dz, \\ \gamma(\nu,\mu) &= \int_0^1 \int_{-1}^{1} \left(1-z^2\right)^{\nu-\mu-1} z^{2\mu+1} \left(1-u^2\right)^{\mu-\frac{1}{2}} du\, dz. \end{aligned}$$

[2] Dihet se polinomet e Jacobi-t janë të përcaktuar me afërsi deri në një faktor konstant. Gjithashtu dihet se të gjitha rrënjët e polinomit të Jacobi-t $P_n^{(\nu,\mu)}(x)$ shtrihen në intervalin $(-1,1)$, d.m.th. $P_n^{(\nu,\mu)}(1)\neq 0$.

Në mënyrë analoge sikur në rastin e operatorit josimetrik, shenojmë

$$S_t^1(f,x,\nu,\mu) = S_t(f,x,\nu,\mu),$$
$$S_{t_1,\ldots,t_r}^r(f,x,\nu,\mu) = S_{t_r}\left(S_{t_1,\ldots,t_{r-1}}^{r-1}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu\right) \qquad (r=2,3,\ldots).$$

Operatorët $S_t(f,x,\nu,\mu)$ quhen simetrikë sepse për $x=\cos\theta_1$ vlen

$$S_t(f,\cos\theta_1,\nu,\mu) = S_{\theta_1}(f,\cos t,\nu,\mu),$$

d.m.th. operatori $S_t(f,\cos\theta_1,\nu,\mu)$ është simetrik sipas t dhe θ_1. Vërejmë se diçka e tillë nuk vlen për operatorët $T_y\,(f,x)$ dhe $\tau_y\,(f,x)$, gjë që arsyeton emërtimin e tyre – operatorë josimetrikë.

Gjithashtu, për $y=\cos t$ vejmë

$$T_y^*\,(f,x) = T_y\,(f,x) - \frac{3}{2}\left(1-y^2\right)S_t(f,x,2,2)$$
$$= \frac{1}{\pi\left(1-x^2\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-R^2-2\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)\right)f(R)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

dhe

$$T_y^{*1}\,(f,x) = T_y^*\,(f,x)\,,$$
$$T_{y_1,\ldots,y_r}^{*r}\,(f,x) = T_{y_r}^*\left(T_{y_1,\ldots,y_{r-1}}^{*r-1}\,(f,x)\,,x\right) \qquad (r=2,3,\ldots).$$

§ 1.2. Mbi disa veti të metrikës $L_{p,\alpha,\beta}$

Në vazhdim japim disa pohime të cilat do të shërbejnë si ndihmëse gjatë vërtetimit të rezultateve në kapitujt vijues.

Lemë 1.2.1. *Le të jenë dhënë numrat natyrorë q dhe m. Atëherë*

1) *funksioni*
$$\gamma_m(t) = \left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2q+4}$$
është polinom trigonometrik çift i shkallës $(q+2)(m-1)$;

2) *për $\nu\ge\mu\ge-\frac{1}{2}$, $\lambda\ge 0$ dhe $-2<\lambda+2\nu<2q+2$ ka vend mosbarazimi*
$$\frac{1}{\gamma_m}\int_0^\pi t^\lambda\gamma_m(t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2\mu+1}dt \le Cm^{-\lambda},$$
ku
$$\gamma_m = \int_0^\pi \gamma_m(t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2\mu+1}dt,$$
kurse C është konstantë e cila nuk varet nga m.

Lema 1.2.1 paraqet një vlerësim standard të bërthamës së Jackson-it (shih p.sh. [31, f. 111–113] dhe [32, f. 233–235]).

Lemë 1.2.2. *Le të jetë $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ dhe le të jenë p, α, β, ρ, σ dhe λ numra të tillë që $1 \le p \le \infty$, $\rho \ge 0$, $\sigma \ge 0$, $\lambda > \lambda_0 = 2\max\{\rho, \sigma\}$;*

$$\begin{array}{ll} \alpha > -\frac{1}{p} \text{ dhe } \beta > -\frac{1}{p} & \text{për } 1 \le p < \infty, \\ \alpha \ge 0 \text{ dhe } \beta \ge 0 & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Në qoftë se ekziston vargu i polinomeve algjebrike $P_{2^n}(x)$ të shkallës $2^n - 1$ $(n = 0, 1, \dots)$ të tillë që

$$\|f - P_{2^n}\|_{p,\alpha+\rho,\beta+\sigma} \le \frac{C_1}{2^{n\lambda}},$$

atëherë vlejnë edhe mosbarazimet

$$\|f - P_{2^n}\|_{p,\alpha,\beta} \le \frac{C_2}{2^{n(\lambda-\lambda_0)}},$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta të cilat nuk varen nga n.

Lema 1.2.2 është vërtetuar në [21].

Lemë 1.2.3. *Le të jetë $P_n(x)$ polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$, $1 \le p \le \infty$, $\rho \ge 0$, $\sigma \ge 0$;*

$$\begin{array}{ll} \alpha > -\frac{1}{p} \text{ dhe } \beta > -\frac{1}{p} & \text{për } 1 \le p < \infty, \\ \alpha \ge 0 \text{ dhe } \beta \ge 0 & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Janë të vërteta mosbarazimet

$$\|P_n'(x)\|_{p,\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}} \le C_1 n \|P_n\|_{p,\alpha,\beta},$$
$$\|P_n\|_{p,\alpha,\beta} \le C_2 n^{2\max\{\rho,\sigma\}} \|P_n\|_{p,\alpha+\rho,\beta+\sigma},$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta të cilat nuk varen nga n.

Lema 1.2.3 është vërtetur në [33].

Rrjedhim 1.2.1. *Le të jetë $P_n(x)$ polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$, $1 \le p \le \infty$;*

$$\begin{array}{ll} \alpha > -\frac{1}{p} \text{ dhe } \beta > -\frac{1}{p} & \text{për } 1 \le p < \infty, \\ \alpha \ge 0 \text{ dhe } \beta \ge 0 & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Atëherë

$$\|D_{x,\nu,\mu} P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} \le C n^2 \|P_n\|_{p,\alpha,\beta},$$

ku C është konstantë e cilat nuk varet nga n.

Vërtetim. Meqë

$$\begin{aligned} &\|D_{x,\nu,\mu} P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} \\ &\le \left\|\left(1 - x^2\right) P_n''(x)\right\|_{p,\alpha,\beta} + |\mu - \nu| \, \|P_n'\|_{p,\alpha,\beta} + |\nu + \mu + 2| \, \|x P_n'(x)\|_{p,\alpha,\beta} \\ &\qquad \le C_1 \left(\|P_n''(x)\|_{p,\alpha+1,\beta+1} + \|P_n'(x)\|_{p,\alpha,\beta} \right), \end{aligned}$$

duke zbatuar dy herë lemën 1.2.3 kemi

$$\|D_{x,\nu,\mu} P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} \le C_2 n \|P_n'(x)\|_{p,\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}} \le C_3 n^2 \|P_n\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Rrjedhimi u vërtetua. ∎

Lemë 1.2.4. *Në qoftë se $-1 \le x \le 1$, $-1 \le z \le 1$ dhe $0 \le t \le \pi$, atëherë $-1 \le R \le 1$ dhe*

$$\begin{gathered}
\left(1-x^2\right)\left(1-z^2\right) \le \left(1-R^2\right), \\
\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) \le \left(1-R^2\right), \\
\left(x\sqrt{1-y^2} - yz\sqrt{1-x^2}\right)^2 \le \left(1-R^2\right), \\
\left(y\sqrt{1-x^2} - xz\sqrt{1-y^2}\right)^2 \le \left(1-R^2\right), \\
1-x^2 \le C\left(1-R^2+t^2\right), \\
1-x \le C\left(1-R+t^2\right), \\
1+x \le C\left(1+R+t^2\right),
\end{gathered}$$

ku R është dhënë në (1.1), $y = \cos t$, kurse C është konstantë absolute.

Tri mosbarazimet e para janë vërtetuar në [26]. Mosbarazimi i katërt rrjedh nga mosbarazimi i tretë[3], duke marrë parasysh faktin se R është simetrik sipas x dhe y. Tri mosbarazimet e fundit janë vërtetuar në [34].

Lemë 1.2.5. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β, ν, μ dhe r të tillë që $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu \ge \mu \ge -\frac{1}{2}$;*

1) *në qoftë se $\nu = \mu = -\frac{1}{2}$, atëherë $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$;*

2) *në qoftë se $\nu = \mu > -\frac{1}{2}$, atëherë $\alpha = \beta$, dhe*

$$\begin{array}{ll}
-\frac{1}{2} < \alpha \le \nu & \text{për } p = 1, \\
-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\
0 \le \alpha < \nu + \frac{1}{2} & \text{për } p = \infty;
\end{array}$$

3) *në qoftë se $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$, atëherë $\beta = -\frac{1}{2p}$, dhe*

$$\begin{array}{ll}
-\frac{1}{2} < \alpha \le \nu & \text{për } p = 1, \\
-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\
0 \le \alpha < \nu + \frac{1}{2} & \text{për } p = \infty;
\end{array}$$

4) *në qoftë se $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$, atëherë $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$, dhe*

$$\begin{array}{ll}
-\frac{1}{2} < \beta \le \mu & \text{për } p = 1, \\
-\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\
0 \le \beta < \mu + \frac{1}{2} & \text{për } p = \infty.
\end{array}$$

Atëherë për $f(x) \in AD^r(p, \alpha, \beta)$ vlen mosbarazimi

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le Cn^{-2r} \left\| D^r_{x,\nu,\mu} f(x) \right\|_{p,\alpha,\beta},$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f dhe n.

[3] Në mënyrë analoge edhe mosbarazimi i parë i lemës implikon mosbarazimin e dytë.

Vërtetim. Vërtetojmë në fillim pohimin e lemës për $r = 1$. Zgjedhim numrin natyror q të tillë që $q > \nu$. Për çdo numër natyror n zgjedhim numrin natyror m të tillë që

$$\frac{n-1}{q+2} < m \leq \frac{n-1}{q+2} + 1.$$

Në [20] dhe [21] është vërtetuar që funksioni

$$Q(x) = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi S_t(f, x, \nu, \mu) \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\mu+1} dt,$$

ku

$$\gamma_m = \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\mu+1} dt,$$

është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n - 1$. Duke zbatuar mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t [35, f. 179] fitojmë

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq \|f - Q\|_{p,\alpha,\beta} &= \Bigg\| \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi (f(x) - S_t(f, x, \nu, \mu)) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\mu+1} dt \Bigg\|_{p,\alpha,\beta} \\ &\leq \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi \|S_t(f, x, \nu, \mu) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta} \\ &\qquad \times \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\mu+1} dt. \end{aligned}$$

Në [22, f. 47] dhe [24] është vërtetuar se nën kushtet e lemës kemi

$$\|S_t(f, x, \nu, \mu) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_1 t^2 \|D_{x,\nu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

ku C_1 është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Prej këtej marrim

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p,\alpha,\beta} &\leq C_1 \|D_{x,\nu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha,\beta} \\ &\qquad \times \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi t^2 \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\mu+1} dt. \end{aligned}$$

Duke zbatuar lemën 1.2.1 gjejmë se

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq \frac{C_2}{m^2} \|D_{x,\nu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \frac{C_3}{n^2} \|D_{x,\nu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Pra, mosbarazimi i lemës është i saktë për $r = 1$.

Për të vërtetuar këtë mosbarazim për $r \in \mathbb{N}$ të çfarëdoshëm, vërtetojmë së pari mosbarazimin

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq \frac{C_4}{n^2} E_n \left(D_{x,\nu,\mu} f \right)_{p,\alpha,\beta}, \tag{1.3}$$

ku C_4 është konstantë e cila nuk varet nga f dhe n.

Le të jetë $P_n(x)$ polinomi algjebrik i përafrimit më të mirë[4] të funksionit $D_{x,\nu,\mu}f(x)$ i shkallës jo më të madhe se $n-1$. Është e qartë se polinomi $P_n(x)$ mund të paraqitet në formën

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k^{(\nu,\mu)}(x).$$

Le të jetë

$$g(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{k(k+\nu+\mu+1)} P_k^{(\nu,\mu)}(x).$$

Atëherë sipas rastit të sapovërtetuar $r=1$ të lemës, kemi [36, f. 171]

$$\begin{aligned} E_n(g)_{p,\alpha,\beta} &\le \frac{C_3}{n^2} \|D_{x,\nu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha,\beta} \\ &= \frac{C_3}{n^2} \left\| D_{x,\nu,\mu} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{k(k+\nu+\mu+1)} D_{x,\nu,\mu} P_k^{(\nu,\mu)}(x) \right\|_{p,\alpha,\beta} \\ &= \frac{C_3}{n^2} \left\| D_{x,\nu,\mu} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k^{(\nu,\mu)}(x) \right\|_{p,\alpha,\beta} = \frac{C_3}{n^2} E_n(D_{x,\nu,\mu} f)_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Rrjedhimisht, duke marrë parasysh se $f(x)-g(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$, fitojmë

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le E_n(f-g)_{p,\alpha,\beta} + E_n(g)_{p,\alpha,\beta} &= E_n(g)_{p,\alpha,\beta} \\ &\le \frac{C_3}{n^2} E_n(D_{x,\nu,\mu} f)_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Mosbarazimi (1.3) u vërtetua.

Tani, duke zbatuar r herë mosbarazimin (1.3), për funksionin e dhënë $f(x) \in AD^r(p,\alpha,\beta)$ fitojmë

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_5 n^{-2r} E_n\left(D^r_{x,\nu,\mu} f\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_6 n^{-2r} \left\| D^r_{x,\nu,\mu} f(x) \right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Lema 1.2.5 u vërtetua. ■

Teorema vijuese jep një mosbarazim karakteristik mbi funksionet e matshme në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$ dhe paraqet interes në vehte.

Teoremë 1.2.1. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β dhe γ të tillë që $1 \le p \le \infty$, $\gamma = \min\{\alpha,\beta\}$;*

$$\begin{array}{ll} \gamma > 1 - \frac{1}{2p} & \textit{për } 1 \le p < \infty, \\ \gamma \ge 1 & \textit{për } p = \infty. \end{array}$$

Le të jetë ε numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ dhe le të jenë

$$\gamma_1 = \begin{cases} \alpha - \beta, & \textit{për } \alpha > \beta \\ 0, & \textit{për } \alpha \le \beta, \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} 0, & \textit{për } \alpha > \beta \\ \beta - \alpha, & \textit{për } \alpha \le \beta; \end{cases}$$

[4] Është mirë e njohur [31, f. 40–49], [32, f. 26] se polinomi i tilë ekziston.

për $1 < p \le \infty$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & \textit{për } \gamma \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} \\ 0, & \textit{për } \gamma < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}, \end{cases}$$

për $p = 1$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \gamma - 1, & \textit{për } \gamma \ge 1 \\ 0, & \textit{për } \gamma < 1. \end{cases}$$

Le të jetë $y = \cos t$ *dhe* R *i dhënë në* (1.1). *Atëherë, për çdo funksion* f *të matshëm në segmentin* $[-1, 1]$ *vlen mosbarazimi*

$$\left\| \frac{1}{1-x^2} \int_{-1}^{1} \left(1 - R^2\right) |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha,\beta} \le C\Big(\|f\|_{p,\alpha,\beta} + t^{2(\gamma_1+\gamma_2)} \|f\|_{p,\alpha-\gamma_1,\beta-\gamma_2} + t^{2\gamma_3} \|f\|_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \|f\|_{p,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3} \Big),$$

ku C *është konstantë e cila nuk varet nga* f *dhe* t.

Vërtetim. Në qoftë se së paku njëri nga termat në anën e djathtë të mosbarazimit që duhet vërtetuar është i pafundmë, atëherë saktësia e teoremës është evidente.

Supozojmë se të gjithë termat në anën e djathtë të mosbarazimit janë të fundmë.

Le të jetë $\alpha \ge \beta$. Shqyrtojmë në fillim rastin $1 \le p < \infty$. Kemi

$$I = \left\| \frac{1}{1-x^2} \int_{-1}^{1} \left(1 - R^2\right) |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha,\beta}^{p} = \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} |f(R)| \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \left(1 - R^2\right) dz \right\}^{p} (1-x)^{p(\alpha-1)} (1+x)^{p(\beta-1)}\, dx. \tag{1.4}$$

Në qoftë se $p = 1$, atëherë kemi

$$I \le \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(R)| \delta\, dz\, dx,$$

ku

$$\delta = \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \left(1 - R^2\right) \left(1 - x^2\right)^{\beta-1} (1-x)^{\alpha-\beta}.$$

Le të jetë $\beta < 1$. Sipas lemës 1.2.4 fitojmë

$$\begin{aligned} \delta &= \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\left(1 - z^2\right)\left(1 - x^2\right)\right)^{\beta-1} \left(1 - R^2\right) (1-x)^{\alpha-\beta} \\ &\le C_1 \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \left(\left(1 - z^2\right)\left(1 - x^2\right)\right)^{\beta-1} \left(1 - R^2\right) \left(1 - R + t^2\right)^{\alpha-\beta} \\ &= C_1 \delta_1(x, z, R). \end{aligned}$$

Le të jetë $\beta \ge 1$. Atëherë, sipas lemës 1.2.4,

$$\begin{aligned} \delta &\le C_2 \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \left(1 - R^2\right) \left(1 - R^2 + t^2\right)^{\beta-1} \left(1 - R + t^2\right)^{\alpha-\beta} \\ &= C_2 \delta_2(x, z, R). \end{aligned}$$

Sipas këtyre vlerësimeve të δ kemi

$$I \le C_3 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(R)| \delta_k(x, z, R)\, dz\, dx \qquad (k = 1, 2).$$

Kryejmë në këtë integral të dyfishtë zëvendësimin e variablave sipas formulave

$$\begin{aligned} x &= Ry + V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2} \\ z &= \frac{R\sqrt{1-y^2} - Vy\sqrt{1-R^2}}{\sqrt{1-\left(Ry + V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2}}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

dhe, duke marrë parasysh se vlejnë barazimet[5]

$$\begin{aligned} \left(1-x^2\right)\left(1-z^2\right) &= \left(1-R^2\right)\left(1-V^2\right), \\ \left(1-z^2\right)^{-1/2} &= \left(1-V^2\right)^{-1/2} |J(R, V)|, \end{aligned}$$

fitojmë

$$I \le C_3 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(R)| \delta_k(R, V, R)\, dV\, dR \qquad (k = 1, 2).$$

Vlerësojmë shprehjet [37, f. 31]

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_1(R) = \left(1-R^2\right)^{\beta} \left(1-R+t^2\right)^{\alpha-\beta} \\ \le C_4 \left((1-R)^{\alpha}(1+R)^{\beta} + t^{2(\alpha-\beta)} \left(1-R^2\right)^{\beta}\right) \end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned} &\hat{\delta}_2(R) = \left(1-R^2\right)\left(1-R^2+t^2\right)^{\beta-1} \left(1-R+t^2\right)^{\alpha-\beta} \\ &\le C_5\Big((1-R)^{\alpha}(1+R)^{\beta} + t^{2(\alpha-\beta)}\left(1-R^2\right)^{\beta} + t^{2(\beta-1)}(1-R)^{\alpha-\beta+1}(1+R) \\ &\qquad + t^{2(\alpha-1)}\left(1-R^2\right)\Big). \end{aligned}$$

Për $\frac{1}{2} < \beta = \gamma < 1$ kemi

$$I \le C_3 \int_{-1}^{1} |f(R)| \hat{\delta}_1(R) \int_{-1}^{1} \left(1-V^2\right)^{\beta-\frac{3}{2}}\, dV\, dR,$$

kurse për $\beta = \gamma \ge 1$

$$I \le C_3 \int_{-1}^{1} |f(R)| \hat{\delta}_2(R) \int_{-1}^{1} \left(1-V^2\right)^{-1/2}\, dV\, dR;$$

d.m.th.

$$I \le C_6 \int_{-1}^{1} |f(R)| \hat{\delta}_k(R)\, dR \qquad (k = 1, 2).$$

[5] Me $J(R, V) = \frac{D(x,z)}{D(R,V)}$ është shenuar jakobiani përkatës.

Mosbarazimi i fundit dhe vlerësimet për $\hat{\delta}_k(R)$ implikojnë

$$I \le C_7\big(\|f\|_{1,\alpha,\beta} + t^{2\gamma_1}\|f\|_{1,\alpha-\gamma_1,\beta} + t^{2\gamma_3}\|f\|_{1,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2(\gamma_1+\gamma_3)}\|f\|_{1,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_3}\big),$$

ku C_7 është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Prej këtej dhe nga fakti se $\gamma_2 = 0$ rrjedh saktësia e teoremës në rastin e shqyrtuar për $p = 1$.

Le të jetë $1 < p < \infty$. Duke zbatuar mosbarazimin e Hölder-it në integralin e brendshëm në (1.4) fitojmë

$$I = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1}|f(R)|\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+1-b}\left(1-R^2\right)\left(1-z^2\right)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)+b}dz\right\}^p \times (1-x)^{p(\alpha-1)}(1+x)^{p(\beta-1)}\,dx \le C_8\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\varkappa\,dz\,dx,$$

ku

$$\varkappa = \left(1-z^2\right)^{-1+p\left(\frac{1}{2}-b\right)}\left(1-R^2\right)^p\left(1-x^2\right)^{p(\beta-1)}(1-x)^{p(\alpha-\beta)},$$

b – numër i çfarëdoshëm pozitiv, konstanta C_8 nuk varet nga f dhe t.

Le të jetë $\beta < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$. Atëherë vejmë $b = \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} - \beta$, dhe duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë

$$\varkappa \le C_9\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{p(\beta-1)}\left(1-R^2\right)^p\left(1-R+t^2\right)^{p(\alpha-\beta)} = C_9\varkappa_1(x,z,R).$$

Le të jetë $\beta \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$. Atëherë vejmë $b = \varepsilon$, ku ε është numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, dhe duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë

$$\varkappa \le C_{10}\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}+p\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\left(1-R^2\right)^p \times \left(1-R^2+t^2\right)^{p\left(\beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}\left(1-R+t^2\right)^{p(\alpha-\beta)} = C_{10}\varkappa_2(x,z,R).$$

Sipas këtyre vlerësimeve të $\varkappa$ kemi

$$I \le C_{11}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\varkappa_k(x,z,R)\,dz\,dx \qquad (k=1,2).$$

Kryejmë në këtë integral zëvendësimin e variablave sipas formulave (1.5):

$$I \le C_{11}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\varkappa_k(R,V,R)\,dV\,dR \qquad (k=1,2).$$

Vlerësojmë shprehjet

$$\hat{\varkappa}_1(R) = \left(1-R^2\right)^{p\beta}\left(1-R+t^2\right)^{p(\alpha-\beta)} \le C_{12}\left((1-R)^{p\alpha}(1+R)^{p\beta} + t^{2p(\alpha-\beta)}\left(1-R^2\right)^{p\beta}\right)$$

dhe

$$\begin{aligned}\hat{\varkappa}_2(R) &= \left(1-R^2\right)^{-\frac{1}{2}+p\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)}\left(1-R^2+t^2\right)^{p\left(\beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}\left(1-R+t^2\right)^{p(\alpha-\beta)} \\ &\le C_{13}\Bigg((1-R)^{p\alpha}(1+R)^{p\beta}+t^{2p(\alpha-\beta)}\left(1-R^2\right)^{p\beta} \\ &+t^{2p\left(\beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}(1-R)^{p\left(\alpha-\beta+\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}-\varepsilon\right)}(1+R)^{p\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}-\varepsilon\right)} \\ &+t^{2p\left(\alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}\left(1-R^2\right)^{p\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}-\varepsilon\right)}\Bigg).\end{aligned}$$

Për $1-\frac{1}{2p}<\beta=\gamma<\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}$ kemi

$$I \le C_{11}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\hat{\varkappa}_1(R)\int_{-1}^{1}\left(1-V^2\right)^{-\frac{1}{2}+p(\beta-1)}\,dV\,dR,$$

kurse për $\beta=\gamma\ge\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}$ dhe $\varepsilon<\frac{1}{2}$

$$I \le C_{11}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\hat{\varkappa}_2(R)\int_{-1}^{1}\left(1-V^2\right)^{-1+p\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\,dV\,dR.$$

Rrjedhimisht, në të dy rastet fitojmë

$$I \le C_{14}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\hat{\varkappa}_k(R)\,dR \qquad (k=1,2).$$

Mosbarazimi i fundit dhe vlerësimet për $\hat{\varkappa}_k(R)$ implikojnë vlerësimin

$$\begin{aligned}I \le C_{15}\Big(\|f\|^p_{p,\alpha,\beta}&+t^{2p\gamma_1}\|f\|^p_{p,\alpha-\gamma_1,\beta}+t^{2p\gamma_3}\|f\|^p_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} \\ &+t^{2p(\gamma_1+\gamma_3)}\|f\|^p_{p,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_3}\Big),\end{aligned}$$

ku C_{15} është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Nga ky vlerësim rrjedh saktësia e pohimit të teoremës në rastin e shqyrtuar për $1<p<\infty$.

Le të jetë tani $p=\infty$. Shqyrtojmë

$$\begin{aligned}J=\int_{-1}^{1}|f(R)|\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(1-R^2\right)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\,dz \\ =\int_{-1}^{1}|f(R)|\lambda\,dz,\end{aligned}$$

ku

$$\lambda=\left(1-z^2\right)^{-1+b}\left(1-R^2\right)\left(1-x^2\right)^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-\beta}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}-b},$$

b – numër i çfarëdoshëm pozitiv.

Le të jetë $1\le\beta=\gamma<\frac{3}{2}$. Atëherë vejmë $b=\frac{3}{2}-\beta$, dhe duke zbatuar vlerësimet nga lema 1.2.4 fitojmë

$$\begin{aligned}\lambda&=\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\left(1-R^2\right)\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-\beta} \\ &\le C_{16}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\left(1-R^2\right)^{\beta}\left(1-R+t^2\right)^{\alpha-\beta}=C_{16}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\lambda_1(R).\end{aligned}$$

Le të jetë $\beta = \gamma \geq \frac{3}{2}$. Atëherë vejmë $b = \varepsilon$, ku ε është numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, dhe duke zbatuar vlerësimet nga lema 1.2.4 fitojmë

$$\begin{aligned}\lambda = \left(1-z^2\right)^{-1+\varepsilon}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\left(1-R^2\right)\left(1-x^2\right)^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon}(1-x)^{\alpha-\beta} \\ \leq C_{17}\left(1-z^2\right)^{-1+\varepsilon}\left(1-R^2\right)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\left(1-R^2+t^2\right)^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon}\left(1-R+t^2\right)^{\alpha-\beta} \\ = C_{17}\left(1-z^2\right)^{-1+\varepsilon}\lambda_2(R).\end{aligned}$$

Sipas këtyre vlerësimeve të λ dhe duke marrë parasysh se

$$\lambda_1(R) \leq C_{18}\left((1-R)^{\alpha}(1+R)^{\beta} + t^{2(\alpha-\beta)}\left(1-R^2\right)^{\beta}\right),$$

$$\begin{aligned}\lambda_2(R) \leq C_{19}\Big((1-R)^{\alpha}(1+R)^{\beta} + t^{2(\alpha-\beta)}\left(1-R^2\right)^{\beta} \\ + t^{2\left(\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}(1-R)^{\alpha-\beta+\frac{3}{2}-\varepsilon}(1+R)^{\frac{3}{2}-\varepsilon} + t^{2\left(\alpha-\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}\left(1-R^2\right)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\Big),\end{aligned}$$

për $k = 1, 2$ kemi

$$\begin{aligned}J \leq C_{20}\max_{-1\leq R\leq 1}|f(R)|\lambda_k(R) \leq C_{21}\big(\|f\|_{\infty,\alpha,\beta} + t^{2\gamma_1}\|f\|_{\infty,\alpha-\gamma_1,\beta} \\ + t^{2\gamma_3}\|f\|_{\infty,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2(\gamma_1+\gamma_3)}\|f\|_{\infty,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_3}\big),\end{aligned}$$

ku C_{21} është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Prej këtej rrjedh saktësia e teoremës në rastin e shqyrtuar për $p = \infty$.

Kështu u vërtetua pohimi i teoremës për $\alpha \geq \beta$.

Le të jetë $\alpha \leq \beta$. Shqyrtojmë në fillim rastin $1 \leq p < \infty$ dhe vleresojmë I në (1.4).

Në qoftë se $p = 1$, atëherë kemi

$$I \leq \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|\sigma\,dz\,dx,$$

ku

$$\sigma = \left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(1-R^2\right)\left(1-x^2\right)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-\alpha}.$$

Le të jetë $\alpha < 1$. Atëherë, duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë

$$\begin{aligned}\sigma = \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{\alpha-1}\left(1-R^2\right)(1+x)^{\beta-\alpha} \\ \leq C_{22}\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{\alpha-1}\left(1-R^2\right)\left(1+R+t^2\right)^{\beta-\alpha} \\ = C_{22}\sigma_1(x,z,R).\end{aligned}$$

Le të jetë $\alpha \geq 1$. Atëherë, sipas lemës 1.2.4,

$$\begin{aligned}\sigma \leq C_{23}\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(1-R^2\right)\left(1-R^2+t^2\right)^{\alpha-1}\left(1+R+t^2\right)^{\beta-\alpha} \\ = C_{23}\sigma_2(x,z,R).\end{aligned}$$

Sipas këtyre vlerësimeve të σ kemi

$$I \leq C_{24}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|\sigma_k(x,z,R)\,dz\,dx \qquad (k = 1, 2).$$

Duke kryer në këtë integral të dyfishtë zëvendësimin e variablave sipas formulave (1.5) fitojmë

$$I \le C_{24} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(R)| \sigma_k(R,V,R)\, dV\, dR \qquad (k=1,2).$$

Vlerësojmë shprehjet

$$\hat\sigma_1(R) = \left(1-R^2\right)^{\alpha}\left(1+R+t^2\right)^{\beta-\alpha} \le C_{25}\Big((1-R)^{\alpha}(1+R)^{\beta} + t^{2(\beta-\alpha)}\left(1-R^2\right)^{\alpha}\Big)$$

dhe

$$\hat\sigma_2(R) = \left(1-R^2\right)\left(1-R^2+t^2\right)^{\alpha-1}\left(1+R+t^2\right)^{\beta-\alpha}$$
$$\le C_{26}\Big((1-R)^{\alpha}(1+R)^{\beta} + t^{2(\beta-\alpha)}\left(1-R^2\right)^{\alpha} + t^{2(\alpha-1)}(1-R)(1+R)^{\beta-\alpha+1} + t^{2(\beta-1)}\left(1-R^2\right)\Big).$$

Për $\frac{1}{2} < \alpha = \gamma < 1$ kemi

$$I \le C_{24}\int_{-1}^{1} |f(R)|\hat\sigma_1(R) \int_{-1}^{1} \left(1-V^2\right)^{\alpha-\frac{3}{2}}\, dV\, dR,$$

kurse për $\alpha = \gamma \ge 1$

$$I \le C_{24}\int_{-1}^{1} |f(R)|\hat\sigma_2(R) \int_{-1}^{1} \left(1-V^2\right)^{-1/2}\, dV\, dR;$$

d.m.th.

$$I \le C_{27}\int_{-1}^{1} |f(R)|\hat\sigma_k(R)\, dR \qquad (k=1,2).$$

Mosbarazimi i fundit dhe vlerësimet për $\hat\sigma_k(R)$ implikojnë

$$I \le C_{28}\big(\|f\|_{1,\alpha,\beta} + t^{2\gamma_2}\|f\|_{1,\alpha,\beta-\gamma_2} + t^{2\gamma_3}\|f\|_{1,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2(\gamma_2+\gamma_3)}\|f\|_{1,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3}\big),$$

ku C_{28} është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Prej këtej dhe nga fakti se $\gamma_1 = 0$ rrjedh saktësia e teoremës në rastin e shqyrtuar për $p = 1$.

Le të jetë $1 < p < \infty$. Duke zbatuar mosbarazimin e Hölder-it në integralin e brendshëm në (1.4) fitojmë

$$I = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} |f(R)|\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+1-a}\left(1-R^2\right)\left(1-z^2\right)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)+a}\, dz\right\}^{p}$$
$$\times (1-x)^{p(\alpha-1)}(1+x)^{p(\beta-1)}\, dx \le C_{29}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(R)|^{p}\theta\, dz\, dx,$$

ku

$$\theta = \left(1-z^2\right)^{-1+p\left(\frac{1}{2}-a\right)}\left(1-R^2\right)^{p}\left(1-x^2\right)^{p(\alpha-1)}(1+x)^{p(\beta-\alpha)},$$

a – numër i çfarëdoshëm pozitiv, konstanta C_{29} nuk varet nga f dhe t.

Le të jetë $\alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$. Atëherë vejmë $a = \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} - \alpha$, dhe duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë

$$\theta \le C_{30}\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{p(\alpha-1)}\left(1-R^2\right)^p\left(1+R+t^2\right)^{p(\beta-\alpha)} = C_{30}\theta_1(x,z,R).$$

Le të jetë $\alpha \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$. Atëherë vejmë $a = \varepsilon$, ku ε është numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, dhe duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë

$$\theta \le C_{31}\left(1-z^2\right)^{-1/2}\left(\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}+p\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\left(1-R^2\right)^p \times\left(1-R^2+t^2\right)^{p\left(\alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}\left(1+R+t^2\right)^{p(\beta-\alpha)} = C_{31}\theta_2(x,z,R).$$

Sipas këtyre vlerësimeve të θ kemi

$$I \le C_{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\theta_k(x,z,R)\,dz\,dx \qquad (k=1,2).$$

Kryejmë në këtë integral zëvendësimin e variablave sipas formulave (1.5):

$$I \le C_{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\theta_k(R,V,R)\,dV\,dR \qquad (k=1,2).$$

Vlerësojmë shprehjet

$$\hat\theta_1(R) = \left(1-R^2\right)^{p\alpha}\left(1+R+t^2\right)^{p(\beta-\alpha)} \le C_{33}\Big((1-R)^{p\alpha}(1+R)^{p\beta} + t^{2p(\beta-\alpha)}\left(1-R^2\right)^{p\alpha}\Big)$$

dhe

$$\hat\theta_2(R) = \left(1-R^2\right)^{-\frac{1}{2}+p\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)}\left(1-R^2+t^2\right)^{p\left(\alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}\left(1+R+t^2\right)^{p(\beta-\alpha)} \le C_{34}\Bigg((1-R)^{p\alpha}(1+R)^{p\beta} + t^{2p(\beta-\alpha)}\left(1-R^2\right)^{p\alpha} + t^{2p\left(\alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}(1-R)^{p\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}-\varepsilon\right)}(1+R)^{p\left(\beta-\alpha+\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}-\varepsilon\right)} + t^{2p\left(\beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)}\left(1-R^2\right)^{p\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}-\varepsilon\right)}\Bigg).$$

Për $1 - \frac{1}{2p} < \alpha = \gamma < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$ kemi

$$I \le C_{32}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\hat\theta_1(R)\int_{-1}^{1}\left(1-V^2\right)^{-\frac{1}{2}+p(\alpha-1)}\,dV\,dR,$$

kurse për $\alpha = \gamma \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$ dhe $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$I \le C_{32}\int_{-1}^{1}|f(R)|^p\hat\theta_2(R)\int_{-1}^{1}\left(1-V^2\right)^{-1+p\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\,dV\,dR.$$

Rrjedhimisht, në të dy rastet fitojmë

$$I \le C_{35} \int_{-1}^{1} |f(R)|^p \hat{\theta}_k(R)\, dR \qquad (k = 1, 2).$$

Mosbarazimi i fundit dhe vlerësimet për $\hat{\theta}_k(R)$ implikojnë

$$I \le C_{36} \Big(\|f\|^p_{p,\alpha,\beta} + t^{2p\gamma_2} \|f\|^p_{p,\alpha,\beta-\gamma_2} + t^{2p\gamma_3} \|f\|^p_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2p(\gamma_2+\gamma_3)} \|f\|^p_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3} \Big),$$

ku C_{36} është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Nga ky vlerësim rrjedh saktësia e pohimit të teoremës në rastin e shqyrtuar për $1 < p < \infty$.

Le të jetë tani $p = \infty$. Shqyrtojmë

$$J = \int_{-1}^{1} |f(R)| \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \left(1 - R^2\right) (1 - x)^{\alpha-1} (1 + x)^{\beta-1}\, dz = \int_{-1}^{1} |f(R)| \omega\, dz,$$

ku

$$\omega = \left(1 - z^2\right)^{-1+a} \left(1 - R^2\right) \left(1 - x^2\right)^{\alpha-1} (1 + x)^{\beta-\alpha} \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}-a},$$

a – numër i çfarëdoshëm pozitiv.

Le të jetë $1 \le \alpha = \gamma < \frac{3}{2}$. Atëherë vejmë $a = \frac{3}{2} - \alpha$, dhe duke zbatuar vlerësimet nga lema 1.2.4 fitojmë

$$\begin{aligned}\omega &= \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(1 - R^2\right) \left(\left(1 - z^2\right)\left(1 - x^2\right)\right)^{\alpha-1} (1 + x)^{\beta-\alpha} \\ &\le C_{37} \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(1 - R^2\right)^{\alpha} \left(1 + R + t^2\right)^{\beta-\alpha} = C_{37} \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \omega_1(R).\end{aligned}$$

Le të jetë $\alpha = \gamma \ge \frac{3}{2}$. Atëherë vejmë $a = \varepsilon$, ku ε është numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, dhe duke zbatuar vlerësimet nga lema 1.2.4 fitojmë

$$\begin{aligned}\omega &= \left(1 - z^2\right)^{-1+\varepsilon} \left(\left(1 - z^2\right)\left(1 - x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left(1 - R^2\right) \left(1 - x^2\right)^{\alpha-\frac{3}{2}+\varepsilon} (1 + x)^{\beta-\alpha} \\ &\le C_{38} \left(1 - z^2\right)^{-1+\varepsilon} \left(1 - R^2\right)^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \left(1 - R^2 + t^2\right)^{\alpha-\frac{3}{2}+\varepsilon} \left(1 + R + t^2\right)^{\beta-\alpha} \\ &= C_{38} \left(1 - z^2\right)^{-1+\varepsilon} \omega_2(R).\end{aligned}$$

Sipas këtyre vlerësimeve të ω dhe duke marrë parasysh se

$$\omega_1(R) \le C_{39} \left((1 - R)^{\alpha} (1 + R)^{\beta} + t^{2(\beta-\alpha)} \left(1 - R^2\right)^{\alpha} \right),$$

$$\begin{aligned}\omega_2(R) \le C_{40} \Big(&(1 - R)^{\alpha} (1 + R)^{\beta} + t^{2(\beta-\alpha)} \left(1 - R^2\right)^{\alpha} \\ &+ t^{2\left(\alpha-\frac{3}{2}+\varepsilon\right)} (1 - R)^{\frac{3}{2}-\varepsilon} (1 + R)^{\beta-\alpha+\frac{3}{2}-\varepsilon} + t^{2\left(\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon\right)} \left(1 - R^2\right)^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \Big),\end{aligned}$$

për $k = 1, 2$ kemi

$$\begin{aligned}J \le C_{41} \max_{-1 \le R \le 1} |f(R)| \omega_k(R) \le C_{42} \big(&\|f\|_{\infty,\alpha,\beta} + t^{2\gamma_2} \|f\|_{\infty,\alpha,\beta-\gamma_2} \\ &+ t^{2\gamma_3} \|f\|_{\infty,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2(\gamma_2+\gamma_3)} \|f\|_{\infty,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3} \big),\end{aligned}$$

ku C_{42} është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t. Prej këtej rrjedh saktësia e teoremës në rastin e shqyrtuar për $p = \infty$.

Teorema 1.2.1 u vërtetua në tërësi. ■

Rezultati vijues paraqet rast të veçantë të teoremës 1.2.1.

Rrjedhim 1.2.2. *Le të jenë dhënë numrat p dhe α të tillë që $1 \le p \le \infty$;*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} < \alpha \le 1 & \text{për } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} < \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \le \alpha < \frac{3}{2} & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Le të jetë R i dhënë në (1.1). Atëherë, për çdo funksion f të matshëm në segmentin $[-1, 1]$ vlen mosbarazimi

$$\left\| \frac{1}{1-x^2} \int_{-1}^{1} \left(1 - R^2\right) |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha} \le C \|f\|_{p,\alpha}$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f dhe y.

Vërtet, nën kushtet e rrjedhimit 1.2.2 kemi $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ në teoremën 1.2.1.

Kapitulli II

Karakteristikat strukturale të disa klasave të funksioneve

§ 2.1. Vetitë e operatorit josimetrik $T_y\,(f,x)$ të translacionit të përgjithësuar

Në këtë kapitull do të shqyrtohet zbatimi i modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ të funksionit $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ në përafrimin e funksioneve me polinome algjebrike. Në vazhdim japim disa veti karakteristike të operatorit josimetrik të translacionit të përgjithësuar $T_y\,(f,x)$.

Lemë 2.1.1. *Operatorët T_y^* dhe S_t kanë vetitë*

$$T_y^*\left(P_n^{(2,2)},x\right) = P_n^{(2,2)}(x)P_{n+2}^{(0,0)}(y),$$
$$S_t\left(P_n^{(2,2)},x,2,2\right) = P_n^{(2,2)}(x)P_n^{(2,2)}(\cos t)$$

për $n=0,1,\ldots$.

Barazimi i parë i lemës 2.1.1 është vërtetuar në [26], kurse i dyti në [20, f. 216].

Lemë 2.1.2. *Le të jenë $g(x)T_y^*\,(f,x) \in L_{1,2}$ dhe $g(x)S_t\,(f,x,2,2) \in L_{1,2}$ për çdo y. Atëherë, vlejnë barazimet*

$$\int_{-1}^{1} f(x)T_y^*\,(g,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)T_y^*\,(f,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx,$$
$$\int_{-1}^{1} f(x)S_t\,(g,x,2,2)\left(1-x^2\right)^2\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)S_t\,(f,x,2,2)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Vërtetim. Shqyrtojmë

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-1}^{1} f(x) T_y^* (g,x) \left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x) g(R) \left(1-R^2-2\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)\right)\left(1-x^2\right) \frac{dz\,dx}{\sqrt{1-z^2}},\end{aligned}$$

ku R është dhënë në (1.1). Kryejmë në integralin e dyfishtë zëvendësimin e variablave sipas formulave (1.5):

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right) g(R)\left(1-R^2\right) \\ &\times \left(1-\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2-2\left(1-y^2\right)\left(1-V^2\right)\right)\frac{dV\,dR}{\sqrt{1-V^2}} \\ &= \int_{-1}^{1} g(R)\left(1-R^2\right)^2 \frac{1}{\pi\left(1-R^2\right)}\int_{-1}^{1} f\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\ &\times \left(1-\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2-2\left(1-y^2\right)\left(1-V^2\right)\right)\frac{dV}{\sqrt{1-V^2}}\,dR \\ &= \int_{-1}^{1} g(R) T_y^*(f,R)\left(1-R^2\right)^2 dR,\end{aligned}$$

që vërteton barazimin e parë të lemës.

Shqyrtojmë tani

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-1}^{1} f(x) S_t(g,x,2,2)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= \frac{8}{3\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x) g(R)\left(1-x^2\right)^2\left(1-z^2\right)^2\frac{dz\,dx}{\sqrt{1-z^2}}.\end{aligned}$$

Kryejmë në këtë integral zëvendësimin e variablave sipas formulave (1.5):

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{8}{3\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right) g(R)\left(1-R^2\right)^2 \\ &\times \left(1-V^2\right)^2\frac{dV\,dR}{\sqrt{1-V^2}} = \int_{-1}^{1} g(R) S_t(f,R,2,2)\left(1-R^2\right)^2 dR.\end{aligned}$$

Lemma 2.1.2 u vërtetua. ■

Rrjedhim 2.1.1. *Në qoftë se $f \in L_{1,2}$, ateherë për çdo numër natyror r vlen $T_y^{*r}(f,x) \in L_{1,2}$ dhe $S_t^r(f,x,2,2) \in L_{1,2}$.*

Vërtetim. Vejmë $g(x) \equiv 1$ në $[-1,1]$. Duke marrë parasysh se sipas lemës 2.1.1

$$\begin{aligned}T_y^*(1,x) &= T_y^*\left(P_0^{(2,2)},x\right) = P_0^{(2,2)}(x)P_2^{(0,0)}(y) = \frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}, \\ S_t(1,x,2,2) &= S_t\left(P_0^{(2,2)},x,2,2\right) = P_0^{(2,2)}(x)P_0^{(2,2)}(\cos t) = 1,\end{aligned}$$

kemi se $f(x)T_y^*(1,x) \in L_{1,2}$ dhe $f(x)S_t(1,x,2,2) \in L_{1,2}$. Prej këtej, sipas lemës 2.1.2 marrim

$$\int_{-1}^{1} T_y^*(f,x)\left(1-x^2\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} f(x)T_y^*(1,x)\left(1-x^2\right)^2 dx$$

dhe

$$\int_{-1}^{1} S_t(f,x,2,2)\left(1-x^2\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} f(x)S_t(1,x,2,2)\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Rrjedhimisht [38, f. 137], $T_y^{*r}(f,x) \in L_{1,2}$ dhe $S_t^r(f,x,2,2) \in L_{1,2}$.

Tani rrjedhimi 2.1.1 vërtetohet duke zbatuar induksionin sipas r. ■

Lemë 2.1.3. *Operatori T_y ka vetitë vijuese*

1) *Operatori $T_y(f,x)$ është linear sipas f;*
2) $T_1(f,x) = f(x)$;
3) $T_y\left(P_n^{(2,2)},x\right) = P_n^{(2,2)}(x)R_n(y) \qquad (n=0,1,\ldots)$,
   ku $R_n(y) = P_{n+2}^{(0,0)}(y) + \frac{3}{2}\left(1-y^2\right)P_n^{(2,2)}(y)$;
4) $T_y(1,x) = 1$;
5) *Në qoftë se $g(x)T_y^*(f,x) \in L_{1,2}$ dhe $g(x)S_t(f,x,2,2) \in L_{1,2}$ për t të çfarëdoshëm dhe $y = \cos t$, atëherë*
$$\int_{-1}^{1} f(x)T_y(g,x)\left(1-x^2\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} g(x)T_y(f,x)\left(1-x^2\right)^2 dx;$$
6) $a_n\left(T_y(f,x)\right) = R_n(y)a_n(f) \qquad (n=0,1,\ldots)$.

Vetitë 1)–4) dhe 6) janë vërtetuar në [26]. Vetia 5) rrjedh nga lema 2.1.2 dhe nga fakti që

$$T_y(g,x) = T_y^*(g,x) + \frac{3}{2}\left(1-y^2\right)S_t(g,x,2,2).$$

Rrjedhim 2.1.2. *Në qoftë se $P_n(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$, atëherë për çdo numër natyror r, për $t_1, t_2, \ldots, t_r$ të fiksuar funksionet $T^r_{\cos t_1,\ldots,\cos t_r}(P_n,x)$ dhe $\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(P_n,x)$ janë polinome algjebrike sipas x të shkallës jo më të madhe se $n-1$.*

Vërtetim. Pohimi se funksioni $T^r_{\cos t_1,\ldots,\cos t_r}(P_n,x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$ vërtetohet lehtë duke zbatuar r herë pohimin 3) të lemës 2.1.3.

Për të vërtetuar se funksioni $\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(P_n,x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$, vërejmë se operatori $\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x)$ i diferencës së përgjithësuar të rendit r mund të paraqitet në formë eksplicite sipas formulës[1]

$$\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k} T^k_{\cos y_{i_1},\ldots,\cos y_{i_k}}(f,x) + (-1)^r f(x),$$

[1] Formula vërtetohet lehtë duke zbatuar induksionin matematik sipas r. Vërejmë se për $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$ vetia analoge e diferencës së zakonshme është dhënë në [39, f. 115].

d.m.th. paraqitet si kombinim linear i fuqive të operatorit përkatës të translacionit të përgjithësuar. Tani, pohimi i dytë implikohet nga pohimi i parë i lemës. ■

Lemë 2.1.4. *Le të jetë $f \in L_{1,2}$. Për çdo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ka vend barazimi*[2]

$$\int_{-1}^{1} T_y^*\,(f,x)\,P_n^{(1,1)}(y)\,dy = \sum_{k=0}^{n-2} a_k(f)\gamma_k(x),$$

ku $\gamma_k(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-2$ për $n \geq 2$, dhe $\gamma_k(x) \equiv 0$ për $n=0$ ose $n=1$.

Lema 2.1.4 është vërtetuar në [26].

Lemë 2.1.5. *Le të jenë q dhe m numra të dhënë natyrorë dhe le të jetë $f \in L_{1,2}$. Për çfarëdo numrash natyrorë l dhe r $(l \leq r)$ funksioni*

$$Q_1^{(l)}(x) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi T^{*l}_{\cos t_1,\ldots,\cos t_l}\,(f,x) \prod_{s=1}^{r} \left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4} \sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r$$

është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)(m-1)$.

Vërtetim. Meqë, sipas lemës 1.2.1, për $s=1,2,\ldots$ vlen

$$\gamma_m(t_s) = \left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4} = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} b_k \cos kt_s = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} c_k(\cos t_s)^k,$$

kemi

$$\gamma_m(t_s)\sin^2 t_s = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} c_k(\cos t_s)^k\left(1-\cos^2 t_s\right) = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)+2} d_k(\cos t_s)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)+2} \alpha_k P_k^{(1,1)}(\cos t_s) \qquad (s=1,2,\ldots,r).$$

Prandaj

$$Q_1^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)+2} \alpha_k \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \prod_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{r} \left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}$$
$$\times \sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_{l-1}\,dt_{l+1}\ldots dt_r \int_0^\pi T^{*l}_{\cos t_1,\ldots,\cos t_l}\,(f,x)\,P_k^{(1,1)}(\cos t_l)\sin t_l\,dt_l.$$

Le të jetë

$$\varphi_{l,k}(x) = \int_0^\pi T^{*l}_{\cos t_1,\ldots,\cos t_l}\,(f,x)\,P_k^{(1,1)}(\cos t_l)\sin t_l\,dt_l.$$

[2] Konsiderojmë se $\sum_{k=k_1}^{k_2}(\cdot) = 0$ për $k_1 > k_2$.

Duke zëvendësuar $y=\cos t_l$ fitojmë

$$\begin{aligned}\varphi_{l,k}(x) = \int_0^\pi T^*_{\cos t_l}\left(T^{*l-1}_{\cos t_1,\dots,\cos t_{l-1}}(f,x),x\right)P_k^{(1,1)}(\cos t_l)\sin t_l\,dt_l \\ = \int_{-1}^1 T^*_y\left(T^{*l-1}_{\cos t_1,\dots,\cos t_{l-1}}(f,x),x\right)P_k^{(1,1)}(y)\,dy.\end{aligned}$$

Duke zbatuar lemën 2.1.4 fitojmë

$$\varphi_{l,k}(x) = \sum_{j=0}^{k-2}\gamma_j(x)\int_{-1}^1 T^{*l-1}_{\cos t_1,\dots,\cos t_{l-1}}(f,u)\,P_j^{(2,2)}(u)\left(1-u^2\right)^2 du.$$

Sipas rrjedhimit 2.1.1 kemi se $T^{*l-1}_{\cos t_1,\dots,\cos t_{l-1}}(f,u)\in L_{1,2}$. Zbatojmë $l-1$ herë lemat 2.1.2 dhe 2.1.1, dhe gjejmë

$$\begin{aligned}\varphi_{l,k}(x) &= \sum_{j=0}^{k-2}\gamma_j(x)\int_{-1}^1 T^{*l-2}_{\cos t_1,\dots,\cos t_{l-2}}(f,u)\,T^*_{\cos t_{l-1}}\left(P_j^{(2,2)},u\right)\left(1-u^2\right)^2 du \\ &= \sum_{j=0}^{k-2}\gamma_j(x)P_{j+2}^{(0,0)}(\cos t_{l-1})\int_{-1}^1 T^{*l-2}_{\cos t_1,\dots,\cos t_{l-2}}(f,u)\,P_j^{(2,2)}(u)\left(1-u^2\right)^2 du \\ &= \sum_{j=0}^{k-2}\gamma_j(x)P_{j+2}^{(0,0)}(\cos t_1)\dots P_{j+2}^{(0,0)}(\cos t_{l-1})\int_{-1}^1 f(u)P_j^{(2,2)}(u)\left(1-u^2\right)^2 du \\ &= \sum_{j=0}^{k-2}\gamma_j(x)a_j(f)\prod_{s=1}^{l-1}P_{j+2}^{(0,0)}(\cos t_s).\end{aligned}$$

Duke zëvendësuar këtë vlerë të $\varphi_{l,k}(x)$ në shprehjen për $Q_1^{(l)}(x)$ dhe duke pasur parasysh që $P_{j+2}^{(0,0)}(\cos t_s)$ janë polinome algjebrike sipas t_s, fitojmë

$$Q_1^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)+2}\alpha_k\sum_{j=0}^{k-2}\beta_j\gamma_j(x).$$

Meqë $\gamma_j(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $k-2$ për $k\geq 2$, ku $\gamma_j(x)\equiv 0$ për $k=0$ ose $k=1$, atëherë nga barazimi i fundit rrjedh se $Q_1^{(l)}(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)(m-1)$.

Lema 2.1.5 u vërtetua. ■

Lemë 2.1.6. *Le të jenë q dhe m numra të dhënë natyrorë dhe le të jetë $f\in L_{1,2}$. Për çfarëdo numrash natyrorë l dhe r $(l\leq r)$ funksioni*

$$Q_2^{(l)}(x) = \int_0^\pi\cdots\int_0^\pi S^l_{t_1,\dots,t_l}(f,x,2,2)\prod_{s=1}^r\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\sin^5 t_s\,dt_1\dots dt_r$$

është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)(m-1)$.

Vërtetim. Siç është treguar në lemën 2.1.5, kemi

$$\gamma_m(t_s) = \left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4} = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} c_k(\cos t_s)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} \beta_k P_k^{(2,2)}(\cos t_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Prandaj

$$Q_2^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} \beta_k \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \prod_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{r} \left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}$$
$$\times \sin^5 t_s\, dt_1 \ldots dt_{l-1}\, dt_{l+1} \ldots dt_r \int_0^\pi S^l_{t_1,\ldots,t_l}\,(f, x, 2, 2)\, P_k^{(2,2)}(\cos t_l) \sin^5 t_l\, dt_l.$$

Le të jetë

$$\psi_{l,k}(x) = \int_0^\pi S^l_{t_1,\ldots,t_l}\,(f, x, 2, 2)\, P_k^{(2,2)}(\cos t_l) \sin^5 t_l\, dt_l.$$

Duke zëvendësuar $y = \cos t_l$ fitojmë

$$\psi_{l,k}(x) = \int_0^\pi S_{t_l}\left(S^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}\,(f, x, 2, 2)\,, x, 2, 2\right) P_k^{(2,2)}(\cos t_l) \sin^5 t_l\, dt_l$$
$$= \int_{-1}^1 S_{t_l}\left(S^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}\,(f, x, 2, 2)\,, x, 2, 2\right) P_k^{(2,2)}(y) \left(1 - y^2\right)^2 dy.$$

Le të jetë $x = \cos\theta_1$. Meqë operatori $S_{t_l}\,(f, \cos\theta_1, 2, 2)$ është simetrik sipas θ_1 dhe t_l, kemi

$$\psi_{l,k}(x) = \int_{-1}^1 S_{\theta_1}\left(S^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}\,(f, y, 2, 2)\,, y, 2, 2\right) P_k^{(2,2)}(y) \left(1 - y^2\right)^2 dy.$$

Meqë sipas rrjedhimit 2.1.1 kemi $S^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}\,(f, y, 2, 2) \in L_{1,2}$, duke zbatuar lemën 2.1.2 fitojmë

$$\psi_{l,k}(x) = \int_{-1}^1 S^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}\,(f, y, 2, 2)\, S_{\theta_1}\left(P_k^{(2,2)}, y, 2, 2\right) \left(1 - y^2\right)^2 dy.$$

Duke marrë parasysh vetinë e operatorit S_{θ_1} nga lema 2.1.1 gjejmë

$$\psi_{l,k}(x) = P_k^{(2,2)}(x) \int_{-1}^1 S^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}\,(f, y, 2, 2)\, P_k^{(2,2)}(y) \left(1 - y^2\right)^2 dy.$$

Duke zbatuar $l - 1$ herë lemat 2.1.2 dhe 2.1.1 fitojmë

$$\psi_{l,k}(x) = P_k^{(2,2)}(x) P_k^{(2,2)}(\cos t_1) \ldots P_k^{(2,2)}(\cos t_{l-1})$$
$$\times \int_{-1}^1 f(y) P_k^{(2,2)}(y) \left(1 - y^2\right)^2 dy = P_k^{(2,2)}(x) a_k(f) \prod_{s=1}^{l-1} P_k^{(2,2)}(\cos t_s).$$

Duke zëvendësuar këtë vlerë të $\psi_{l,k}(x)$ në shprehjen për $Q_2^{(l)}(x)$ dhe duke pasur parasysh që $P_k^{(2,2)}(\cos t_s)$ janë polinome algjebrike sipas t_s, fitojmë

$$Q_2^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} \delta_k P_k^{(2,2)}(x).$$

Meqë $P_k^{(2,2)}(x)$ është polinom algjebrik i shkallës k, atëherë nga barazimi i fundit rrjedh se $Q_2^{(l)}(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)\times(m-1)$.

Lema 2.1.6 u vërtetua. ■

Teorema vijuese shqyrton kufizueshmërinë e operatorit linear T_y.

Teoremë 2.1.1. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β dhe γ të tillë që $1 \le p \le \infty$, $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$;*

$$\begin{aligned} \gamma > 1 - \tfrac{1}{2p} \quad & \textit{për } 1 \le p < \infty, \\ \gamma \ge 1 \quad & \textit{për } p = \infty. \end{aligned}$$

Le të jetë ε numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ dhe le të jenë

$$\gamma_1 = \begin{cases} \alpha - \beta, & \textit{për } \alpha > \beta \\ 0, & \textit{për } \alpha \le \beta, \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} 0, & \textit{për } \alpha > \beta \\ \beta - \alpha, & \textit{për } \alpha \le \beta; \end{cases}$$

për $1 < p \le \infty$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & \textit{për } \gamma \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} \\ 0, & \textit{për } \gamma < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}, \end{cases}$$

për $p = 1$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \gamma - 1, & \textit{për } \gamma \ge 1 \\ 0, & \textit{për } \gamma < 1. \end{cases}$$

Atëherë, vlen mosbarazimi

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}_t(f,x) \right\|_{p,\alpha,\beta} \le C\Big(& \|f\|_{p,\alpha,\beta} + t^{2(\gamma_1+\gamma_2)} \|f\|_{p,\alpha-\gamma_1,\beta-\gamma_2} \\ & + t^{2\gamma_3} \|f\|_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + t^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \|f\|_{p,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3} \Big), \end{aligned}$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t.

Vërtetim. Kemi

$$\left\| \tilde{T}_t(f,x) \right\|_{p,\alpha,\beta} = \frac{1}{\pi} \left\| \frac{1}{1-x^2} \int_{-1}^{1} A_{\cos t}(x,z,R) f(R) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha,\beta},$$

ku R dhe $A_{\cos t}(x,z,R)$ janë dhënë me formulat (1.1). Sipas lemës 1.2.4 marrim

$$A_{\cos t}(x,z,R) \le 1 - R^2 + 2\left(1-R^2\right) + 4\left(1-R^2\right)^2 \le 7\left(1-R^2\right).$$

Prandaj

$$\left\| \tilde{T}_t(f,x) \right\|_{p,\alpha,\beta} \le \frac{7}{\pi} \left\| \frac{1}{1-x^2} \int_{-1}^{1} \left(1-R^2\right) |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Tani pohimi i teoremës 2.1.1 rrjedh nga teorema 1.2.1. ■

§ 2.2. Mbi përputhjen e klasëve të funksioneve $E(p,\alpha,\beta,\lambda)$ dhe $H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$

Tani, në dy pikat vijuese, vërtetojmë rezultatet kryesore në këtë kapitull.

Teorema vijuese jep mënyrën e ndërtimit me anë e bërthamës së Jackson-it, të polinomit korrespondues algjebrik për funksionin e dhënë f duke shfrytëzuar operatorin josimetrik të translacionit të përgjithësuar $\tilde{T}_t\,(f,x)$.

Teoremë 2.2.1. *Le të jenë q, m dhe r numra të dhënë natyrorë dhe le të jetë $f \in L_{1,2}$. Funksioni*

$$Q(x) = \frac{1}{(\gamma_m)^r}\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \left(\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}\,(f,x) - (-1)^r f(x)\right)\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4} \times \sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r,$$

ku

$$\gamma_m = \int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2q+4}\sin^3 t\,dt,$$

është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)(m-1)$.

Vërtetim. Meqë, siç kemi vërejtur gjatë vërtetimit të rrjedhimit 2.1.2,

$$\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}\,(f,x) = \sum_{l=1}^{r}(-1)^{l-1}\sum_{i_1<\cdots<i_l}\tilde{T}^l_{t_1,\ldots,t_l}\,(f,x) + (-1)^r f(x),$$

atëherë mjafton të vërtetohet se për $l = 1,2,\ldots,r$

$$Q^{(l)}(x) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi T^l_{\cos t_1,\ldots,\cos t_l}\,(f,x)\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r$$

është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)(m-1)$.

Funksioni $Q^{(l)}(x)$ mund të shkruhet në formën

$$Q^{(l)}(x) = Q_1^{(l)}(x) + \frac{3}{2}Q_2^{(l)}(x).$$

Por, atëherë në saje të lemave 2.1.5 dhe 2.1.6 përfundojmë se $Q^{(l)}(x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $(q+2)(m-1)$.

Teorema 2.2.1 u vërtetua. ■

Në dy teoremat vijuese 2.2.2 dhe 2.2.3 shqyrtohet zhytja e klasëve të funksioneve $H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$ në klasët $E(p,\alpha,\beta,\lambda)$ dhe anasjelltas. Pohimet e tipit të teoremës 2.2.2 përfaqësojnë teoremën direkte, kurse ato të tipit të teoremës 2.2.3 – teoremën e anasjelltë në teorinë e përafrimeve.[3]

[3] Në përgjithësi, çdo vlerësim nga sipër i përafrimit më të mirë duke shfrytëzuar modulin e lëmueshmërisë paraqet teoremë direkte në teorinë e përafrimeve. Pohimet e anasjellta me këtë paraqesin teoremë të anasjelltë në teorinë e përafrimeve.

Teoremë 2.2.2. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β, r dhe λ të tillë që $1 \le p \le \infty$, $\lambda > 0$, $r \in \mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{ll} \alpha \le 2 \ \textit{dhe}\ \beta \le 2 & \textit{për}\ p = 1, \\ \alpha < 3 - \frac{1}{p} \ \textit{dhe}\ \beta < 3 - \frac{1}{p} & \textit{për}\ 1 < p \le \infty. \end{array}$$

Le të jetë $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Në qoftë se

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \le M\delta^{\lambda},$$

atëherë

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le CMn^{-\lambda},$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f, M dhe n.

Vërtetim. Vërtetojmë së pari se nën kushtet e teoremës, në qoftë se $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, atëherë $f \in L_{1,2}$. Vërtet, për $p = 1$ kemi

$$\|f\|_{1,2,2} = \int_{-1}^{1} |f(x)|(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x)^{2-\alpha}(1+x)^{2-\beta}\,dx \le C_1 \|f\|_{1,\alpha,\beta}$$

për $\alpha \le 2$ dhe $\beta \le 2$. Për $1 < p < \infty$, duke zbatuar mosbarazimin e Hölder-it fitojmë

$$\|f\|_{1,2,2} \le \left\{\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^{p\alpha}(1+x)^{p\beta}\,dx\right\}^{1/p}$$
$$\times \left\{\int_{-1}^{1} (1-x)^{(2-\alpha)\frac{p}{p-1}}(1+x)^{(2-\beta)\frac{p}{p-1}}\,dx\right\}^{\frac{p-1}{p}} = C_2 \|f\|_{p,\alpha,\beta}$$

për $\alpha < 3 - \frac{1}{p}$ dhe $\beta < 3 - \frac{1}{p}$. Për $p = \infty$ kemi

$$\|f\|_{1,2,2} \le \|f\|_{\infty,\alpha,\beta} \int_{-1}^{1} (1-x)^{2-\alpha}(1+x)^{2-\beta}\,dx = C_3 \|f\|_{\infty,\alpha,\beta}$$

për $\alpha < 3$ dhe $\beta < 3$.

Zgjedhim numrin natyror q të tillë që $2q > \lambda$, dhe për çdo numër natyror n zgjedhim numrin natyror m ashtu që të plotësohet kushti

$$\frac{n-1}{q+2} < m \le \frac{n-1}{q+2} + 1. \tag{2.1}$$

Për q dhe m të tillë polinomi $Q(x)$ i përcaktuar në teoremën 2.2.1 është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se $n-1$. Prandaj

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le \left\|f(x) - (-1)^{r+1}Q(x)\right\|_{p,\alpha,\beta} = \Bigg\| \frac{1}{(\gamma_m)^r}$$
$$\times \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x) \prod_{s=1}^{r} \left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4} \sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r \Bigg\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Duke zbatuar mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t gjejmë

$$\begin{aligned}
E_n(f)_{p,\alpha,\beta} &\le \frac{1}{(\gamma_m)^r}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi \left\|\tilde{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta}\prod_{s=1}^r\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4} \\
&\times \sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r \le \frac{1}{(\gamma_m)^r}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi \sup_{\substack{|u_i|\le\sum_{j=1}^r t_j\\ i=1,2,\ldots,r}}\left\|\tilde{\Delta}^r_{u_1,\ldots,u_r}(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \\
&\times\prod_{s=1}^r\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r \\
&\le \frac{1}{(\gamma_m)^r}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi \tilde{\omega}_r\left(f,\sum_{j=1}^r t_j\right)_{p,\alpha,\beta}\prod_{s=1}^r\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r.
\end{aligned}$$

Prej këtej, duke marrë parasysh kushtet e teoremës marrim [37, f. 31]

$$\begin{aligned}
&E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \\
&\quad\le \frac{M}{(\gamma_m)^r}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\left(\sum_{j=1}^r t_j\right)^\lambda\prod_{s=1}^r\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r \\
&\quad\le C_4M\sum_{j=1}^r\frac{1}{(\gamma_m)^r}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi t_j^\lambda\prod_{s=1}^r\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\sin^3 t_s\,dt_1\ldots dt_r.
\end{aligned}$$

Tani, duke zbatuar lemën 1.2.1 dhe duke pasur parasysh mosbarazimin (2.1) fitojmë

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\le C_5Mm^{-\lambda}\le C_6Mn^{-\lambda}.$$

Teorema 2.2.2 u vërtetua. ■

Teoremë 2.2.3. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β, r dhe λ të tillë që $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{ll}
\alpha>1-\frac{1}{2p}\ \textit{dhe}\ \beta>1-\frac{1}{2p} & \textit{për}\ 1\le p<\infty,\\
\alpha\ge 1\ \textit{dhe}\ \beta\ge 1 & \textit{për}\ p=\infty;
\end{array}$$

$$\lambda_0=2\max\left\{|\alpha-\beta|,\alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p},\beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}\right\}<\lambda<2r.$$

Le të jetë $f\in L_{p,\alpha,\beta}$. Në qoftë se

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\le Mn^{-\lambda},$$

atëherë

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}\le CM\delta^\lambda,$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f, M dhe δ.

Vërtetim. Le të jetë $P_n(x)$ polinom i shkallës jo më të madhe se $n-1$ i tillë që

$$\|f-P_n\|_{p,\alpha,\beta}=E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Ndërtojmë polinomet $Q_k(x)$ sipas rregullës

$$Q_k(x) = P_{2^k}(x) - P_{2^{k-1}}(x) \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

dhe $Q_0(x) = P_1(x)$. Meqë për $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\|Q_k\|_{p,\alpha,\beta} &= \left\|P_2^k - P_{2^{k-1}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \leq \|P_{2^k} - f\|_{p,\alpha,\beta} + \|f - P_{2^{k-1}}\|_{p,\alpha,\beta} \\ &= E_{2^k}(f)_{p,\alpha,\beta} + E_{2^{k-1}}(f)_{p,\alpha,\beta},\end{aligned}$$

atëherë sipas kushtit të teoremës kemi

$$\|Q_k\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_1 M 2^{-k\lambda}. \tag{2.2}$$

Duke marrë parasysh vetinë 2) të operatorit $\tilde{T}_{t_s}$ nga lema 2.1.3, pa humbur nga përgjithësimi mund të supozojmë se $t_s \neq 0$ $(s = 1, 2, \dots, r)$. Për $0 < |t_s| \leq \delta$ $(s = 1, 2, \dots, r)$ vlerësojmë

$$I = \left\|\tilde{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(f, x)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Për çdo numër natyror N, duke marrë parasysh se nga vetia e linearitetit të operatorit $\tilde{T}_t(f, x)$ rrjedh lineariteti i operatorit $\tilde{T}^r_{t_1,\dots,t_r}(f, x)$, e rrjedhimisht edhe i operatorit $\tilde{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(f, x)$; kemi

$$I \leq \left\|\tilde{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(f - P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} + \left\|\tilde{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Meqë

$$P_{2^N}(x) = \sum_{k=0}^{N} Q_k(x),$$

atëherë

$$\begin{aligned}I \leq \left\|\tilde{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(f - P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} &+ \sum_{k=0}^{N} \left\|\tilde{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(Q_k, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \\ &= J + \sum_{k=1}^{N} I_k.\end{aligned}$$

Le te jetë N i zgjedhur ashtu që

$$\frac{\pi}{2^N} < \delta \leq \frac{\pi}{2^{N-1}}. \tag{2.3}$$

Vërtetojmë se kanë vend mosbarazimet

$$J \leq C_2 M \delta^{\lambda} \tag{2.4}$$

dhe

$$I_k \leq C_3 M \delta^{2r} 2^{k(2r-\lambda)}, \tag{2.5}$$

ku C_2 dhe C_3 janë konstanta të cilat nuk varen nga f, M, δ dhe k.

Në fillim shqyrtojmë J. Për $r = 1$, duke zbatuar në funksionin $\varphi_1(x) = f(x) - P_{2^N}(x)$ teoremën 2.1.1 dhe duke marrë parasysh se $|t_1| \le \delta$, fitojmë

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\Delta}_{t_1}(f - P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} &= \left\|\tilde{T}_{t_1}(\varphi_1, x) - \varphi_1(x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le \left\|\tilde{T}_{t_1}(\varphi_1, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \\ &+ \|\varphi_1(x)\|_{p,\alpha,\beta} \le C_4\Big(\|\varphi_1\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^{2(\gamma_1+\gamma_2)} \|\varphi_1\|_{p,\alpha-\gamma_1,\beta-\gamma_2} \\ &+ \delta^{2\gamma_3} \|\varphi_1\|_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} + \delta^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \|\varphi_1\|_{p,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3}\Big),\end{aligned}$$

ku numrat γ_1, γ_2 dhe γ_3 janë zgjedhur sipas rregullës së teoremës 1.2.1. Vërejmë se

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma_1 - \gamma_3 = \beta - \gamma_2 - \gamma_3 &\ge \gamma - \max\left\{\gamma - 1 + \frac{1}{2p}, 0\right\} \\ &= \min\left\{1 - \frac{1}{2p}, \gamma\right\} = 1 - \frac{1}{2p} > -\frac{1}{p}, \\ \alpha - \gamma_1 = \beta - \gamma_2 &= \gamma > -\frac{1}{p}, \\ \alpha - \gamma_3 \ge \alpha - \gamma_1 - \gamma_3 &> -\frac{1}{p}, \\ \beta - \gamma_3 \ge \beta - \gamma_2 - \gamma_3 &> -\frac{1}{p}\end{aligned}$$

dhe se

$$\begin{aligned}\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= |\alpha - \beta| + \max\left\{\gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon, 0\right\} \\ &= \max\left\{\alpha - \frac{3}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon, \beta - \frac{3}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon, |\alpha - \beta|\right\} \le \lambda_0 + \varepsilon, \\ \gamma_1 &\le \gamma_1 + \gamma_3 \le \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \le \lambda_0 + \varepsilon, \\ \gamma_2 &\le \gamma_2 + \gamma_3 \le \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \le \lambda_0 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Prandaj duke zbatuar lemën 1.2.2 fitojmë

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\Delta}_{t_1}(f - P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} &\le C_5 M\Big(2^{-N\lambda} + \delta^{2(\gamma_1+\gamma_2)} 2^{-N(\lambda - 2\gamma_1 - 2\gamma_2)} \\ &+ \delta^{2\gamma_3} 2^{-N(\lambda - 2\gamma_3)} + \delta^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} 2^{-N(\lambda - 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - 2\gamma_3)}\Big)\end{aligned}$$

për $\lambda > \lambda_0 + \varepsilon$, ku C_5 është konstantë e cila nuk varet nga f, M dhe δ, dhe ose është $\varepsilon = 0$, ose ε është numër i çfarëdoshëm nga intervali $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Rrjedhimisht, ky mosbarazim ka vend për çdo $\lambda > \lambda_0$. Në fund, duke zbatuar mosbarazimin (2.3) fitojmë

$$\left\|\tilde{\Delta}_{t_1}(f - P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_6 M 2^{N\lambda} \le C_7 M \delta^{\lambda}.$$

Kështu kemi vërtetuar mosbarazimin (2.4) për $r = 1$.

Le të jetë $r > 1$. Supozojmë se

$$\left\|\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(f - P_{2^N}, x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_8 M \delta^{\lambda}.$$

Atëherë, sipas mosbarazimit (2.3)

$$\left\|\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(f-P_{2^N},x)\right\|_{p,\alpha,\beta} = \left\|\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(f,x)-\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(P_{2^N},x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_9 M 2^{-N\lambda}.$$

Në mënyrë analoge sikur në rastin e mësipërm, zbatojmë në funksionin $\varphi_r = \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(f-P_{2^N},x)$ së pari teoremën 2.1.1, pastaj, duke marrë parasysh se sipas rrjedhimit 2.1.2 $\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(P_{2^N},x)$ është polinom algjebrik i shkallës jo më të madhe se 2^N-1, zbatojmë lemën 1.2.2 dhe në fund mosbarazimin (2.3); fitojmë

$$J = \left\|\tilde{\Delta}^{r}_{t_1,\dots,t_r}(f-P_{2^N},x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_{10}\delta^\lambda.$$

Në bazë të parimit të induksionit matematik, jobarzimi (2.4) u vërtetua.

Vërtetojmë tani mosbarazimin (3). Le të jetë

$$\psi_k(x) = \tilde{\Delta}^{r}_{t_1,\dots,t_r}(Q_k,x).$$

Tregojmë së pari se ka vend barazimi

$$\begin{aligned}\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi(1-x^2)}\int_0^{t_r}\int_{-u}^{u}\int_0^{\pi}\Big(A(v)\left(R'_v\right)^2\frac{d^2}{dR_v^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_v)\\ -\left(A(v)R_v-2A'(v)R'_v\right)\frac{d}{dR_v}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_v)\\ +A''(v)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_v)\Big)\,d\varphi\,dv\,du,\end{aligned} \tag{2.6}$$

ku

$$\begin{aligned}R_v &= x\cos v+\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\sin v,\\ A(v) &= 1-R_v^2-2\sin^2 v\sin^2\varphi+4\left(1-x^2\right)\sin^2 v\sin^4\varphi.\end{aligned}$$

Për këtë, mjafton të vërehet se

$$\begin{aligned}\psi_k(x) &= \frac{1}{\pi(1-x^2)}\\ &\times\int_0^\pi\Big(A(t_r)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r})-\left(1-x^2\right)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\Big)\,d\varphi,\\ \frac{d^2}{dt_r^2}A(t_r)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r}) &= A(t_r)\left(R'_{t_r}\right)^2\frac{d^2}{dR^2_{t_r}}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r})\\ &\quad+A''(t_r)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r}),\\ A(0)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_0) &= \left(1-x^2\right)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\end{aligned}$$

dhe se $\int_0^\pi \frac{d}{dt_r}A(t_r)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r})\,d\varphi$ është funksion tek sipas t_r. Tri barazimet e para provohen lehtë. Për të vërtetuar pohimin e fundit tregojmë se $\int_0^\pi A(t_r)\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r})\,d\varphi$ është funksion çift sipas t_r. Meqë sipas rrjedhimit 2.1.2, për $t_1,t_2,\dots,t_{r-1}$ të fiksuar, funksioni $\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,R_{t_r})$ është polinom algjebrik sipas R_{t_r}, atëherë mjafton të tregohet se $\int_0^\pi A(t_r) R_{t_r}^l \, d\varphi$ është funksion çift sipas t_r. Vërtet,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi A(t_r) R_{t_r}^l \, d\varphi = \sum_{j=0}^{l} \Bigg(& b_1 \left(1 - x^2 \cos^2 t_r\right) \cos^j t_r \sin^{l-j} t_r \int_0^\pi \cos^{l-j} \varphi \, d\varphi \\ & + b_2 \cos^j t_r \sin^{l-j+2} t_r \int_0^\pi \cos^{l-j+2} \varphi \, d\varphi \\ & + b_3 \cos^{j+1} t_r \sin^{l-j+1} t_r \int_0^\pi \cos^{l-j+1} \varphi \, d\varphi \\ & + b_4 \cos^j t_r \sin^{l-j+2} t_r \int_0^\pi \cos^{l-j} \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \\ & + b_5 \cos^j t_r \sin^{l-j+2} t_r \int_0^\pi \cos^{l-j} \varphi \sin^4 \varphi \, d\varphi \Bigg).\end{aligned}$$

Prej këtej, duke pasur parasysh se

$$\int_0^\pi \cos^{2m+1} \varphi \sin^\mu \varphi \, d\varphi = 0 \qquad (m, \mu = 0, 1, \ldots),$$

marrim

$$\int_0^\pi A(-t_r) R_{-t_r}^l \, d\varphi = \int_0^\pi A(t_r) R_{t_r}^l \, d\varphi.$$

Kështu, barazimi (2.6) u vërtetua.

Duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë vlerësimet

$$\begin{gathered} |A(v)| \leq 7\left(1 - R_v^2\right), \\ (R_v')^2 \leq \left(1 - R_v^2\right), \\ |A(v) R_v| \leq |A(v)| \leq 7\left(1 - R_v^2\right), \\ |A'(v) R_v'| \leq 2(R_v')^2 + 12|R_v'||\sin v \sin \varphi| \leq 14(R_v')^2 \leq 14\left(1 - R_v^2\right), \\ |A''(v)| \leq 22. \end{gathered}$$

Prandaj duke zëvendësuar $z = \cos \varphi$ kemi

$$|\psi_k(x)| \leq \frac{C_{11}}{1 - x^2} \int_0^{t_r} \int_{-u}^{u} \int_{-1}^{1} B(R_v) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \, dv \, du,$$

ku

$$\begin{aligned} B(R_v) = \left(1 - R_v^2\right)^2 & \left| \frac{d^2}{dR_v^2} \tilde{\Delta}_{t_1, \ldots, t_{r-1}}^{r-1} \left(Q_k, R_v\right) \right| \\ & + \left(1 - R_v^2\right) \left| \frac{d}{dR_v} \tilde{\Delta}_{t_1, \ldots, t_{r-1}}^{r-1} \left(Q_k, R_v\right) \right| + \left| \tilde{\Delta}_{t_1, \ldots, t_{r-1}}^{r-1} \left(Q_k, R_v\right) \right| \\ & = B_1(R_v) + B_2(R_v) + B_3(R_v). \end{aligned}$$

Prej këtej, duke zbatuar mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t, për $|t_r| \leq$

δ kemi

$$\begin{aligned}
I_k = \|\psi_k(x)\|_{p,\alpha,\beta} &\le C_{11}\int_0^{t_r}\int_{-u}^{u}\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} dv\,du \\
&\le C_{12}\delta^2 \sup_{|v|\le\delta}\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \\
&\le C_{12}\delta^2 \sum_{\mu=1}^{3}\sup_{|v|\le\delta}\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B_\mu(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Zbatojmë në funksionin $B_1(R_v)$ teoremën 1.2.1:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B_1(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \\
&\quad\le C_{13}\Bigg(\left\|(1-x^2)\,\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \\
&\quad+ v^{2(\gamma_1+\gamma_2)}\left\|(1-x^2)\,\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha-\gamma_1,\beta-\gamma_2} \\
&\quad+ v^{2\gamma_3}\left\|(1-x^2)\,\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha-\gamma_3,\beta-\gamma_3} \\
&\quad+ v^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}\left\|(1-x^2)\,\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha-\gamma_1-\gamma_3,\beta-\gamma_2-\gamma_3}\Bigg),
\end{aligned}$$

ku C_{13} është konstantë e cila nuk varet nga v.

Duke zbatuar[4] lemën 1.2.3 fitojmë

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B_1(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \\
&\quad\le C_{14}\big(1+v^{2(\gamma_1+\gamma_2)}2^{2k(\gamma_1+\gamma_2)}+v^{2\gamma_3}2^{2k\gamma_3} \\
&\quad+ v^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}2^{2k(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}\big)\left\|(1-x^2)\,\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

Duke zbatuar mosbarazimin (2.3) gjejmë

$$\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B_1(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_{15}\left\|\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha+1,\beta+1}.$$

Në mënyrë analoge, duke zbatuar së pari teoremën 1.2.1, pastaj lemën 1.2.3 dhe në fund mosbarazimin (2.3) fitojmë vlerësimet

$$\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B_2(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_{16}\left\|\frac{d}{dx}\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha,\beta}$$

dhe

$$\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}B_3(R_v)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_{17}\left\|\tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_k,x)\right\|_{p,\alpha-1,\beta-1}.$$

[4] Më heret jemi bindur se plotësohen konditat e lemave 1.2.2 dhe 1.2.3.

Tani, nga mosbarazimi (2.7) rrjedh

$$I_k \le C_{18}\delta^2 \left(\left\| \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha+1,\beta+1} \right.$$
$$\left. + \left\| \frac{d}{dx} \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha,\beta} + \left\| \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha-1,\beta-1} \right).$$

Meqë sipas kushteve të teoremës kemi

$$\alpha + \frac{1}{2} > \alpha > \alpha - \frac{1}{2} > \alpha - 1 \ge -\frac{1}{2p} \ge -\frac{1}{p},$$
$$\beta + \frac{1}{2} > \beta > \beta - \frac{1}{2} > \beta - 1 \ge -\frac{1}{2p} \ge -\frac{1}{p},$$

ku shenja e barazimit në të dy mosbarazimet e skajshme të majta ka vend vetëm atëherë kur $p = \infty$; duke zbatuar dy herë lemën 1.2.3 fitojmë

$$I_k \le C_{19}\delta^2 2^k \left(\left\| \frac{d}{dx} \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. + 2 \left\| \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}} \right) \le C_{20}\delta^2 2^{2k} \left\| \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Në këtë mënyrë kemi vërtetuar se

$$I_k = \left\| \tilde{\Delta}^{r}_{t_1,\ldots,t_r} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_{20}\delta^2 2^{2k} \left\| \tilde{\Delta}^{r-1}_{t_1,\ldots,t_{r-1}} (Q_k, x) \right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Duke zbatuar r herë mosbarazimin e fundit dhe pastaj mosbarazimin (1) fitojmë

$$I_k \le C_{21}\delta^{2r} 2^{2kr} \|Q_k\|_{p,\alpha,\beta} \le C_{22} M \delta^{2r} 2^{k(2r-\lambda)}.$$

Mosbarazimi (3) u vërtetua.

Nga mosbarazimet (2.4), (3) dhe (2.3) fitojmë

$$I \le C_{23} M \left(\delta^\lambda + \delta^{2r} \sum_{k=1}^{N} 2^{k(2r-\lambda)} \right) \le C_{24} M \left(\delta^\lambda + \delta^{2r} 2^{N(2r-\lambda)} \right)$$
$$\le C_{25} M \left(\delta^\lambda + 2^{-N\lambda} \right) \le C_{26} M \delta^\lambda.$$

Teorema 2.2.3 u vërtetua. ■

Rezultati vijues paraqet teoremën mbi përputhjen e klasëve të funksioneve të përkufizuara me anë të rendit të përafrimit më të mirë me polinome algjebrike ose me anë të modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë të rendit r. Gjithashtu, teorema jep karakteristikën strukturale të klasës së funksioneve të cilat plotësojnë kushtin $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le Cn^{-\lambda}$.

Teoremë 2.2.4. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β, r dhe λ të tillë që $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{cl} \frac{1}{2} < \alpha \le 2 \text{ dhe } \frac{1}{2} < \beta \le 2 & \text{për } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} < \alpha < 3 - \frac{1}{p} \text{ dhe } 1 - \frac{1}{2p} < \beta < 3 - \frac{1}{p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \le \alpha < 3 \text{ dhe } 1 \le \beta < 3 & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Atëherë për λ të tillë që

$$\lambda_0 = 2\max\left\{|\alpha-\beta|, \alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}, \beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}\right\} < \lambda < 2r,$$

klasët e funksioneve $H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$ përputhen ndërmjet vedi për vlera të ndryshme të r, dhe përputhen me klasën e funksioneve $E(p,\alpha,\beta,\lambda)$.

Vërtetim. Duke marrë parasysh se, nën kushtet e teoremës, nga teorema 2.2.2 rrjedh përfshierja

$$H(p,\alpha,\beta,r,\lambda) \subseteq E(p,\alpha,\beta,\lambda),$$

kurse nga teorema 2.2.3 përfshierja e anasjelltë

$$E(p,\alpha,\beta,\lambda) \subseteq H(p,\alpha,\beta,r,\lambda),$$

përfundojmë se pohimi i teoremës 2.2.4 implikohet nga teoremat 2.2.2 dhe 2.2.3. ∎

Vërejmë se rast i veçantë i teoremës 2.2.4, për $r=1$, $\alpha=\beta$ dhe

$$\begin{array}{ll} \alpha \le 1 & \text{për } p=1, \\ \alpha < \frac{3}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty, \end{array}$$

është vërtetuar në [26].

§ 2.3. Karakteristikat strukturale të klasëve të funksioneve $E(p,\alpha,\beta,2r+\lambda)$

Teorema vijuese jep lidhjen ndërmjet përafrimit më të mirë me polinome algjebrike të funksionit të dhënë f dhe atij të funksionit $D^r_{x,\nu,\mu}f$.

Teoremë 2.3.1. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β, ν, μ dhe r të tillë që $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $\nu\ge\mu\ge-\frac{1}{2}$;*

1) *në qoftë se $\nu=\mu=-\frac{1}{2}$, atëherë $\alpha=\beta=-\frac{1}{2p}$;*

2) *në qoftë se $\nu=\mu>-\frac{1}{2}$, atëherë $\alpha=\beta$, dhe*

$$\begin{array}{rl} -\frac{1}{2}<\alpha\le\nu & \text{për } p=1, \\ -\frac{1}{2p}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty, \\ 0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2} & \text{për } p=\infty; \end{array}$$

3) *në qoftë se $\nu>\mu=-\frac{1}{2}$, atëherë $\beta=-\frac{1}{2p}$, dhe*

$$\begin{array}{rl} -\frac{1}{2}<\alpha\le\nu & \text{për } p=1, \\ -\frac{1}{2p}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty, \\ 0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2} & \text{për } p=\infty; \end{array}$$

4) *në qoftë se $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$, atëherë $\nu-\mu>\alpha-\beta\ge0$, dhe*

$$\begin{array}{rl} -\frac{1}{2}<\beta\le\mu & \text{për } p=1, \\ -\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty, \\ 0\le\beta<\mu+\frac{1}{2} & \text{për } p=\infty. \end{array}$$

Le të jetë $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që të plotësohet mosbarazimi

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_1 n^{-2r-\lambda}$$

është që $f(x) \in AD^r(p,\alpha,\beta)$ dhe që

$$E_n\left(D^r_{x,\nu,\mu} f\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_2 n^{-\lambda},$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta të cilat nuk varen nga f dhe n.

Vërtetim. Vërtetojmë se kushti është i nevojshëm. Vërejmë së pari se nën kushtet e teoremës vlen $\beta \ge -\frac{1}{2p} \ge -\frac{1}{p}$ $(1 \le p \le \infty)$, ku shenja e barazimit ka vend vetëm atëherë kur $p = \infty$. Duke zbatuar r herë mosbarazimin (1.3), të vërtetuar gjatë vërtetimit të lemës 1.2.5, fitojmë

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_3 n^{-2r} E_n\left(D^r_{x,\nu,\mu} f\right)_{p,\alpha,\beta}.$$

Prej këtej marrim

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_4 n^{-2r-\lambda}.$$

Vërtetojmë tani se kushti është i mjaftueshëm. Le të jetë $P_n(x)$ polinom algjebrik i përafrimit më të mirë të funksionit f. Shqyrtojmë vargun e polinomeve $Q_k(x)$ të dhëna sipas rregullës

$$Q_k(x) = P_{2^k}(x) - P_{2^{k-1}}(x) \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

dhe $Q_0(x) = P_1(x)$. Nga kushtet e teoremës, për $k \ge 1$ rrjedh

$$\begin{aligned} \|Q_k\|_{p,\alpha,\beta} &= \|P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\|_{p,\alpha,\beta} \le E_{2^k}(f)_{p,\alpha,\beta} + E_{2^{k-1}}(f)_{p,\alpha,\beta} \\ &\le 2E_{2^{k-1}}(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_5 2^{-(k-1)(2r+\lambda)} \le C_6 2^{-k(2r+\lambda)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sipas rrjedhimit 1.2.1 kemi

$$\|D_{x,\nu,\mu} Q_k(x)\|_{p,\alpha,\beta} \le C_7 2^{2k} \|Q_k\|_{p,\alpha,\beta},$$

ku C_7 është konstantë e cila nuk varet nga k. Duke zbatuar këtë mosbarazim l herë fitojmë

$$\left\|D^l_{x,\nu,\mu} Q_k(x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_8 2^{2kl} \|Q_k\|_{p,\alpha,\beta} \qquad (l = 1,2,\ldots r).$$

Prandaj nga mosbarazimi (2.8) rrjedh

$$\left\|D^l_{x,\nu,\mu} Q_k(x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_9 2^{-k(2r-2l+\lambda)} \qquad (l = 1,2,\ldots r).$$

Tani, sipas mosbarazimit (2.8), duke marrë parasysh se $\sum_{k=0}^n Q_k(x) = P_{2^n}(x)$, nga kushti i teoremës konkludojmë se për çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$ seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x)$$

konvergjon në kuptim të metrikës $L_p[a,b]$ te funksioni $f(x)$, kurse nga mosbarazimi i fundit rrjedh se seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} D^l_{x,\nu,\mu} Q_k(x)$$

gjithashtu konvergjon në kuptim të metrikës $L_p[a, b]$. Por, atëherë [32, f. 202] kjo seri konvergjon te $D^l_{x,\nu,\mu} f(x)$. Kështu kemi treguar se funksioni $f(x)$ ka derivat të rendit $2r - 1$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Për $l = 1, 2, \dots, r$ vlerësojmë shprehjen

$$I_l = \left\| D^l_{x,\nu,\mu} f(x) - D^l_{x,\nu,\mu} P_{2^N}(x) \right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Nga shqyrtimet e mësipërme është evidente se

$$\begin{aligned} I_l \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\| D^l_{x,\nu,\mu} Q_k(x) \right\|_{p,\alpha,\beta} &\leq C_9 \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k(2r-2l+\lambda)} \\ &\leq C_{10} 2^{-N(2r-2l+\lambda)} \qquad (l = 1, 2, \dots r), \end{aligned}$$

prej nga përfundojmë se $D^l_{x,\nu,\mu} f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ $(l = 1, 2, \dots, r)$. Rrjedhimisht, $f(x) \in AD^r(p, \alpha, \beta)$.

Vejmë

$$R_n(x) = D^r_{x,\nu,\mu} P_{2^N}(x) \qquad \left(2^N \leq n < 2^{N+1}\right).$$

Sipas mosbarazimit të sapovërtetuar kemi

$$\begin{aligned} E_n \left(D^r_{x,\nu,\mu} f\right)_{p,\alpha,\beta} \leq \left\| D^r_{x,\nu,\mu} f(x) - R_n(x) \right\|_{p,\alpha,\beta} &= I_r \\ &\leq C_{10} 2^{-N\lambda} \leq C_{11} n^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.1 u vërtetua. ■

Në vazhdim, përmes modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë të rendit të parë[5] të operatorit të diferencimit japim vetitë strukturale të klasëve të funksioneve të përkufizuara me anë të rendit të zvogëlimit të përafrimeve më të mira me polinome algjebrike. Më saktësisht, jepen vetitë strukturale të klasës së funksioneve joperiodike të cilat plotësojnë kushtin $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq C n^{-2r-\lambda}$ $(r \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Teoremë 2.3.2. *Le të jenë dhënë numrat p, α, β, ν, μ, r, λ, ν_0 dhe μ_0 të tillë që $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\nu \geq \mu > \frac{1}{2}$,*

$$\nu_0 = \min\left\{\nu, \frac{5}{2} - \frac{1}{2p}\right\}, \qquad \mu_0 = \min\left\{\mu, \frac{5}{2} - \frac{1}{2p}\right\};$$

1) *në qoftë se $\nu = \mu > \frac{1}{2}$, atëherë $\alpha = \beta$, dhe*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} < \alpha \leq \nu_0 & \qquad \textit{për } p = 1, \\ 1 - \tfrac{1}{2p} < \alpha < \nu_0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2p} & \qquad \textit{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \leq \alpha < \nu_0 + \tfrac{1}{2} & \qquad \textit{për } p = \infty; \end{aligned}$$

2) *në qoftë se $\nu > \mu > \frac{1}{2}$, atëherë $\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0$, dhe*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} < \beta \leq \mu_0 & \qquad \textit{për } p = 1, \\ 1 - \tfrac{1}{2p} < \beta < \mu_0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2p} & \qquad \textit{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \leq \beta < \mu_0 + \tfrac{1}{2} & \qquad \textit{për } p = \infty; \end{aligned}$$

[5]Në analogji me modulin e zakonshëm, moduli i përgjithësuar i lëmueshmërisë i rendit të parë shpesh quhet modul i përgjithësuar i vazhdueshmërisë.

$$\lambda_0 = 2\max\left\{|\alpha-\beta|, \alpha-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}, \beta-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}\right\} < \lambda < 2.$$

Le të jetë $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që të plotësohet mosbarazimi

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_1 n^{-2r-\lambda}$$

është që $f(x) \in AD^r(p,\alpha,\beta)$ dhe që

$$\tilde{\omega}_1\left(D^r_{x,\nu,\mu} f, \delta\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_2\delta^{\lambda},$$

ku C_2 dhe C_1 janë konstanta të cilat nuk varen nga f, n dhe δ.

Vërtetim. Vërejmë se, nën kushtet e teoremës plotësohen njëkohësisht konditat e teoremave 2.3.1 dhe 2.2.4. Nga teorema 2.2.4 rrjedh ekuivalenca e pohimit $f(x) \in AD^r(p,\alpha,\beta)$ dhe

$$\tilde{\omega}_1\left(D^r_{x,\nu,\mu} f, \delta\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_2\delta^{\lambda}$$

me mosbarazimin

$$E_n\left(D^r_{x,\nu,\mu} f\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_3 n^{-\lambda},$$

kurse teorema 2.3.1 implikon ekuivalencën e mosbarazimit të fundit me jobarazimin

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_1 n^{-2r-\lambda}.$$

Teorema 2.3.2 u vërtetua. ■

Kapitulli III

Karakteristikat konstruktive të disa klasave të funksioneve

§ 3.1. Vetitë e operatorit josimetrik $\tau_y(f,x)$ të translacionit të përgjithësuar

Në këtë kapitull shqyrtojmë zbatimi i modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$ të funksionit $f \in L_{p,\alpha}$ në përafrimin me polinome algjebrike. Së pari japim vetitë karakteristike të operatorit josimetrik të translacionit të përgjithësuar $\tau_y(f,x)$.

Lemë 3.1.1. *Operatori τ_y ka vetitë vijuese*

1) *Operatori $\tau_y(f,x)$ është linear sipas f;*

2) $\tau_1(f,x) = f(x)$;

3) $\tau_y\left(P_n^{(2,2)}, x\right) = P_n^{(2,2)}(x)P_n^{(0,4)}(y) \qquad (n = 0,1,\ldots)$;

4) $\tau_y(1,x) = 1$;

5) *Në qoftë se $g(x)\tau_y(f,x) \in L_{1,2}$ për y të çfarëdoshëm, atëherë*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\tau_y(g,x)\left(1-x^2\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} g(x)\tau_y(f,x)\left(1-x^2\right)^2 dx;$$

6) $a_n\left(\tau_y(f,x)\right) = P_n^{(0,4)}(y)a_n(f) \qquad (n = 0,1,\ldots)$.

Vërtetim. Vetitë 1) dhe 2) rrjedhin drejtpërdrejt nga përkufizimi i operatorit $\tau_y(f,x)$.

Për të vërtetuar vetinë 3) shqyrtojmë funksionet

$$P^l_{\mu\nu}(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\binom{n+\alpha}{\alpha}2^{-\mu}i^{\mu-\nu}\sqrt{\frac{(l-\mu)!(l+\mu)!}{(l-\nu)!(l+\nu)!}}(1-z)^{\frac{\mu-\nu}{2}}(1+z)^{\frac{\mu+\nu}{2}},$$

ku $l = n + \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\nu = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Për numrat realë θ_1 dhe t kemi

$$\begin{aligned} &P^l_{20}(\cos\theta_1)P^l_{22}(\cos t) \\ &\quad = -2^{-4}\sqrt{\frac{(l-2)!\,(l+2)!}{(l!)^2}}P_n^{(2,2)}(\cos\theta_1)P_n^{(0,4)}(\cos t)(1+\cos t)^2\sin^2\theta_1. \quad (3.1)\end{aligned}$$

Vejmë në formulën e shumëzimit për funksionet $P^l_{\mu\nu}$ [40, f. 140] $\mu = k = 2$ dhe $\nu = 0$, dhe, duke marrë parasysh se $P^l_{20}(\cos\theta_1)$ dhe $P^l_{22}(\cos t)$ janë numra realë, fitojmë

$$P^l_{20}(\cos\theta_1)P^l_{22}(\cos t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2(\varphi_1-\varphi)P^l_{20}(\cos\theta)\,d\varphi_1,$$

ku [40, f. 138]

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\theta_1\cos t - \sin\theta_1\sin t\cos\varphi_1, \\ \sin\theta\cos\varphi &= \cos\theta_1\sin t + \sin\theta_1\cos t\cos\varphi_1, \\ \sin\theta\sin\varphi &= \sin\theta_1\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

Prandaj, duke marrë parasysh se $\cos\theta$ dhe

$$\cos 2(\varphi_1-\varphi) = 2(\cos\varphi_1\cos\varphi + \sin\varphi_1\sin\varphi)^2 - 1$$

janë funksione çifte sipas φ_1, kemi

$$\begin{aligned} P^l_{20}(\cos\theta_1)P^l_{22}(\cos t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2(\varphi_1-\varphi)P^l_{20}(\cos\theta)\,d\varphi_1 \\ &= -2^{-2}\sqrt{\frac{(l-2)!\,(l+2)!}{(l!)^2}}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P_n^{(2,2)}(\cos\theta)\cos 2(\varphi_1-\varphi)\sin^2\theta\,d\varphi_1. \end{aligned}$$

Duke krahasuar barazimin e fundit me barazimin (3.1) gjejmë

$$\begin{aligned} &P_n^{(2,2)}(\cos\theta_1)P_n^{(0,4)}(\cos t) \\ &\qquad = \frac{4}{(1+\cos t)^2\sin^2\theta_1}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P_n^{(2,2)}(\cos\theta)\cos 2(\varphi_1-\varphi)\sin^2\theta\,d\varphi_1. \end{aligned}$$

Por

$$\begin{aligned} &\cos 2(\varphi_1-\varphi)\sin^2\theta = 2(\sin\theta\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\theta\sin\varphi\sin\varphi_1)^2 - \sin^2\theta \\ &\quad = 2(\cos\theta_1\sin t\cos\varphi_1 + \sin\theta_1\cos t\cos^2\varphi_1 + \sin\theta_1\sin^2\varphi_1)^2 - \sin^2\theta \\ &\quad = 2(\sin\theta_1\cos t + \cos\theta_1\sin t\cos\varphi_1 + (1-\cos t)\sin\theta_1\sin^2\varphi_1)^2 - \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Prandaj duke vënë $x = \cos\theta_1$, $y = \cos t$ dhe $z = -\cos\varphi_1$ fitojmë

$$P_n^{(2,2)}(x)P_n^{(0,4)}(y) = \frac{4}{\pi\,(1-x^2)\,(1+y)^2}\int_{-1}^{1}B_y(x,z,R)P_n^{(2,2)}(R)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

ku R dhe $B_y(x,z,R)$ janë dhënë në (1.1), përkatësisht (1.2). Prej këtej marrim

$$P_n^{(2,2)}(x)P_n^{(0,4)}(y) = \tau_y\left(P_n^{(2,2)},x\right).$$

Vetia 4) rrjedh nga vetia 3) për $n=0$. Vërtet,

$$\tau_y\,(1,x)=\tau_y\left(P_0^{(2,2)},x\right)=P_0^{(2,2)}(x)P_0^{(0,4)}(y)=1.$$

Vërtetojmë tani vetinë 5). Le të jetë

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}f(x)\tau_y\,(g,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx\\&=\frac{4}{\pi(1+y)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x)g(R)B_y(x,z,R)\left(1-x^2\right)\frac{dz\,dx}{\sqrt{1-z^2}},\end{aligned}$$

ku R dhe $B_y(x,z,R)$ janë dhënë në (1.1) përkatësisht (1.2). Kryejmë në këtë integral të dyfishtë zëvendësimin e variableve sipas formulave (1.5), dhe duke marrë parasysh se nga

$$R^2+\left(y\sqrt{1-x^2}-zx\sqrt{1-y^2}\right)^2=1-\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)$$

rrjedh

$$\left|y\sqrt{1-x^2}-zx\sqrt{1-y^2}\right|=\sqrt{1-R^2-(1-y^2)\,(1-z^2)},$$

e që implikon

$$B_y(x,z,R)\left(1-x^2\right)=B_y(R,V,x)\left(1-R^2\right);$$

fitojmë

$$\begin{aligned}I=\frac{4}{\pi(1+y)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}&f\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)g(R)\\&\times B_y\left(R,V,Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)\left(1-R^2\right)\frac{dV\,dR}{\sqrt{1-V^2}}.\end{aligned}$$

Kështu

$$\begin{aligned}I=\int_{-1}^{1}g(R)\left(1-R^2\right)^2&\frac{4}{\pi\left(1-R^2\right)(1+y)^2}\\&\times\int_{-1}^{1}B_y\left(R,V,Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)\\&\times f\left(Ry+V\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}\right)\frac{dV}{\sqrt{1-V^2}}\,dR\\&=\int_{-1}^{1}g(R)\tau_y\,(f,R)\left(1-R^2\right)^2\,dR,\end{aligned}$$

që duhej vërtetuar.

Vërtetojmë në fund vetinë 6). Shqyrtojmë

$$J=a_n\left(\tau_y\,(f,x)\right)=\int_{-1}^{1}\tau_y\,(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Në bazë të vetive 5) dhe 3) kemi

$$J = \int_{-1}^{1} f(x)\tau_y\left(P_n^{(2,2)}, x\right)\left(1-x^2\right)^2 dx$$
$$= P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx = P_n^{(0,4)}(y)a_n(f).$$

Lema 3.1.1 u vërtetua. ■

Lemë 3.1.2. *Le të jetë $r \in \mathbb{N}$ dhe $f(x)$ funksion me derivat $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}f(x)$ të rendit $2r-1$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$. Atëherë*

1) *Për y të fiksuar funksioni $\tau_y(f,x)$ ka derivat $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}\tau_y(f,x)$ të rendit $2r-1$ sipas x absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[c,d] \subset (-1,1)$.*

2) *Për x të fiksuar funksioni $\tau_y(f,x)$ ka derivat $\frac{d^{2r-1}}{dy^{2r-1}}\tau_y(f,x)$ të rendit $2r-1$ sipas y absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[c,d] \subset (-1,1)$.*

3) *Në qoftë se $D_{x,2,2}f(x) \in L_{1,2}$, atëherë për $r = 1$ dhe pothuajse çdo x dhe y nga segmenti $[-1,1]$ kanë vend barazimet*

$$\tau_y(D_{x,2,2}f, x) = D_{x,2,2}\tau_y(f,x) = D_{y,0,4}\tau_y(f,x).$$

Vërtetim. Vërtetojmë pohimin 1). Le të jetë $r = 1$. Vejmë

$$\varphi(x) = \frac{4B_y(x,z,R)}{\pi(1-x^2)(1+y)^2\sqrt{1-z^2}}f(R),$$

ku R dhe $B_y(x,z,R)$ janë dhënë në (1.1), përkatësisht (1.2). Kemi

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = f(R)\frac{d}{dx}\frac{4B_y(x,z,R)}{\pi(1-x^2)(1+y)^2\sqrt{1-z^2}}$$
$$+ \frac{4B_y(x,z,R)}{\pi(1-x^2)(1+y)^2\sqrt{1-z^2}}\left(y - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\right)f'(R).$$

Shqyrtojmë funksionin

$$R(x) = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}.$$

Për $x = \cos\theta_1$ kemi

$$\frac{dR}{d\theta_1} = -y\sin\theta_1 + z\sqrt{1-y^2}\cos\theta_1.$$

Meqë për y dhe z të fiksuar funksioni $\frac{dR}{d\theta_1}$ është i vazhdueshëm dhe ka jo më shumë se një rrënjë (nëse ekziston) $\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(z\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$ në segmentin $[0,\pi]$, atëherë funksioni R është rigorozisht monoton sipas θ_1 në sc:ilin nga segmentet $[0,\theta_0]$ dhe $[\theta_0,\pi]$. Tani nga monotonia rigoroze e funksionit $x = \cos\theta_1$ në segmentin $[0,\pi]$ rrjedh monotonia rigoroze e funksionit R sipas x në sc:ilin nga segmentet $[-1,\cos\theta_0]$ dhe $[\cos\theta_0, 1]$. Prandaj, vazhdueshmëria absolute e funksioneve $f(x)$ dhe $f'(x)$ në segmentin e çfarëdoshëm $[c,d] \subset (-1,1)$ implikon [38,

f. 228] vazhdueshmërinë absolute sipas x të funksioneve $f(R)$, përkatësisht $f'(R)$ në sc:ilin nga segmentet $[-1,\cos\theta_0]\cap[c,d]$ dhe $[\cos\theta_0,1]\cap[c,d]$. Meqë funksionet $f(R)$ dhe $f'(R)$ janë të vazhdueshme sipas x në $[c,d]$, nga përkufizimi i vazhdueshmërisë absolute rrjedh se funksionet $f(R)$ dhe $f'(R)$ janë absolutisht të vazhdueshme sipas x në $[c,d]$.

Meqë funksioni $\varphi'(x)$ paraqet shumë prodhimesh të funksioneve absolutisht të vazhdueshme, konkludojmë se $\varphi'(x)$ është funksion absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[c,d]\subset(-1,1)$. Meqë sipas teoremës së Lagrange-it mbi të mesmen

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{d}{dx}\varphi(x+\theta h),\qquad 0\le\theta\le1,$$

atëherë

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right|\le M$$

për çdo x dhe $x+h$ nga $[c,d]$, për y dhe z të fiksuar nga $[-1,1]$. Rrjedhimisht, duke zbatuar teoemën e Lebesgue-ut mbi kalimin me limit nën shenjën e integralit [41, f. 346] konkludojmë se për y dhe z të fiksuar, në çdo segment $[c,d]\subset(-1,1)$ ekziston derivati i fundëm

$$\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)=\lim_{h\to0}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,dz=\int_{-1}^{1}\varphi'(x)\,dz.$$

Tani, vazhdueshmëria absolute e funksionit $\varphi'(x)$ implikon vazhdueshmërinë absolute të derivatit $\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)$ në çdo segment $[c,d]\subset(-1,1)$.

Kështu u vërtetua pohimi 1) për $r=1$.

Le të jetë $r>1$. Me induksion mund të vërtetohet se për $l=1,2,\dots,2r-1$ kemi

$$\begin{aligned}\varphi^{(l)}(x)&=\frac{d^l}{dx^l}\varphi(x)\\&=\frac{4}{\pi(1+y)^2\sqrt{1-z^2}}\sum_{k=0}^{l}\binom{r}{k}\left(\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}\frac{B_y(x,z,R)}{(1-x^2)}\right)\frac{d^k}{dx^k}f(R),\end{aligned}$$

ku

$$\frac{d^k}{dx^k}f(R)=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{d^\nu f(R)}{dR^\nu}\sum_{\substack{\mu_1\ge\cdots\ge\mu_\nu\ge0\\ \mu_1+\cdots+\mu_\nu=k}}\alpha_k\prod_{j=1}^{k}\frac{d^{\mu_j}R}{dx^{\mu_j}}.$$

Me rezonim analog sikur në rastin $r=1$ vërtetohet se funksioni $\varphi^{(l)}(x)$ është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[c,d]\subset(-1,1)$ $(l=1,2,\dots,2r-1)$. Duke zbatuar teoremën e Lebesgue-ut, përfundojmë se për y dhe z të fiksuar, në çdo segment $[c,d]\subset(-1,1)$ ekziston derivati i fundëm

$$\begin{aligned}\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}\tau_y(f,x)&=\lim_{h\to0}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(2r-2)}(x+h)-\varphi^{(2r-2)}(x)}{h}\,dz\\&=\int_{-1}^{1}\varphi^{(2r-1)}(x)\,dz.\end{aligned}$$

Rrjedhimisht, vazhdueshmëria absolute e funksionit nën shenjën e integralit implikon vazhdueshmërinë absolute të derivatit $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}\tau_y(f,x)$ në çdo segment $[c,d]\subset(-1,1)$.

Pohimi 1) u vërtetua.

Me rezonim plotësisht analog, duke shfrytëzuar faktin se R është simetrik sipas x dhe y, vërtetohet vazhdueshmëria absolute e funksionit $\frac{d^{2r-1}}{dy^{2r-1}}\tau_y(f,x)$ për x dhe z të fiksuar.

Vërtetojmë pohimin 3). Së pari vërtetojmë barazimin

$$\tau_y(D_{x,2,2}f,x) = D_{x,2,2}\tau_y(f,x). \tag{3.2}$$

Nga pohimi 1) rrjedh se për çdo y të fiksuar funksioni $\tau_y(f,x)$ ka derivat absolutisht të vazhdueshëm $\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)$ në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$. Rrjedhimisht, ekziston $D_{x,2,2}\tau_y(f,x)$.

Le të jetë fillimisht $f(x)$ funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$. Duke zbatuar vetitë 5) dhe 3) nga lema 3.1.1 kemi

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1}&\tau_y(D_{x,2,2}f,x)P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} D_{x,2,2}f(x)\tau_y\left(P_n^{(2,2)},x\right)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1} D_{x,2,2}f(x)P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1} P_n^{(2,2)}(x)\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Integrojmë parcialisht, duke marrë parasysh se $\frac{d}{dx}f(x)=0$ jashtë $[a,b]\subset(-1,1)$, për të fituar

$$I = -P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^3\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\frac{d}{dx}P_n^{(2,2)}(x)\,dx.$$

Integrojmë sërish parcialisht, tani duke pasur parasysh se $f(x)=0$ jashtë $[a,b]\subset(-1,1)$, dhe kemi

$$\begin{aligned} I = P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1}&f(x)\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}P_n^{(2,2)}(x)\,dx \\ &= P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1} D_{x,2,2}P_n^{(2,2)}(x)f(x)\left(1-x^2\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Dihet se [36, f. 171]

$$D_{x,2,2}P_n^{(2,2)}(x) = -n(n+5)P_n^{(2,2)}(x).$$

Prandaj për funksionin $f(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$ vlen

$$I = -n(n+5)P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx. \tag{3.4}$$

Duke zbatuar përsëri lemën 3.1.1 fitojmë

$$\begin{aligned}I &= -n(n+5)\int_{-1}^{1} f(x)\tau_y\left(P_n^{(2,2)},x\right)\left(1-x^2\right)^2\,dx\\ &= -n(n+5)\int_{-1}^{1}\tau_y(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}\tau_y(f,x)\,D_{x,2,2}P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Vërejmë se $\tau_y(f,x)=0$ jashtë ndonjë segmenti $[\gamma,\delta]\subset(-1,1)$. Vërtet, duke vënë

$$\varepsilon=\min\{|a-y|,|a+y|,|b-y|,|b+y|\},$$

për $|x|>\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$, d.m.th. $\sqrt{1-x^2}<\frac{\varepsilon}{2}$, kemi

$$|R-xy|=\left|z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right|\le\sqrt{1-x^2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

dhe

$$\begin{aligned}|R-xy| &\ge |R-y\operatorname{sgn}x|-|\operatorname{sgn}x-x||y| = |R-y\operatorname{sgn}x|-(1-|x|)|y|\\ &\ge |R-y\operatorname{sgn}x|-(1-|x|),\end{aligned}$$

ku R është dhënë në (1.1). Prandaj, për $\varepsilon<2$,

$$|R-y\operatorname{sgn}x|<\frac{\varepsilon}{2}+1-|x|\le\frac{\varepsilon}{2}+1-x^2<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}<\varepsilon.$$

Në këtë mënyrë, për $\gamma=-1+\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$, $\delta=1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$ kemi se $x\in[-1,1]\backslash[\gamma,\delta]$ implikon $|R-y\operatorname{sgn}x|<\varepsilon$, d.m.th. $R\in[-1,1]\setminus[a,b]$, Prej këtej, $f(R)=0$ jashtë segmentit $[\gamma,\delta]\subset(-1,1)$, rrjedhimisht $\tau_y(f,x)=0$ jashtë $[\gamma,\delta]$.

Tani, duke integruar dy herë parcialisht në (3.5) fitojmë

$$\begin{aligned}I &= -\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^3\left(\frac{d}{dx}P_n^{(2,2)}(x)\right)\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}P_n^{(2,2)}(x)\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}D_{x,2,2}\tau_y(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.\end{aligned}$$

Kështu

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\tau_y(D_{x,2,2}f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\\ &\qquad=\int_{-1}^{1}D_{x,2,2}\tau_y(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx \qquad (n=0,1,\ldots).\end{aligned}$$

Rrjedhimisht, për y të fiksuar të gjithë koeficientët Fourier–Jacobi të funksionit

$$F_1(x)=\tau_y(D_{x,2,2}f,x)-D_{x,2,2}\tau_y(f,x)$$

sipas sistemit të polinomeve të Jacobi-t $\left\{P_n^{(2,2)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ anulohen. Nga vetia e plotësisë së këtij sistemit në $L_{1,2}$ [42, f. 323] përfundojmë se $F_1(x)=0$ pothuajse kudo në $[-1,1]$.

Në këtë mënyrë barazimi (3.2) është vërtetuar për y të fiksuar, për funksionin $f(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$.

Le të jetë tani $f(x)$ funksion që plotëson kushtet e lemës, d.m.th. me derivat $f'(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$. Le të jetë $g(x)$ funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$. Atëherë, është evidente se

$$g(x)\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)\to 0$$

dhe

$$\tau_y(f,x)\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}g(x)\to 0$$

për $x\to -1+0$ dhe $x\to 1-0$.

Le të jetë

$$J_1=\int_{-1}^{1}D_{x,2,2}\tau_y(f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx. \tag{3.6}$$

Integrojmë dy herë parcialisht, duke konsideruar së pari të parin e pastaj të dytin nga dy limitet e mësipërme, për të fituar

$$\begin{aligned}J_1=-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^3\left(\frac{d}{dx}\tau_y(f,x)\right)\frac{d}{dx}g(x)\,dx\\ =\int_{-1}^{1}\tau_y(f,x)\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}g(x)\,dx\\ =\int_{-1}^{1}D_{x,2,2}g(x)\tau_y(f,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.\end{aligned}$$

Duke zbatuar lemën 3.1.1 kemi

$$J_1=\int_{-1}^{1}f(x)\tau_y(D_{x,2,2}g,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx. \tag{3.7}$$

Le të jetë tani

$$J_2=\int_{-1}^{1}\tau_y(D_{x,2,2}f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Sipas lemës 3.1.1

$$\begin{aligned}J_2=\int_{-1}^{1}D_{x,2,2}f(x)\tau_y(g,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx\\ =\int_{-1}^{1}\tau_y(g,x)\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Siç kemi vërejtur më heret, për funksionin $g(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$ kemi

$\tau_y(g,x)=0$ jashtë ndonjë segmenti $[\gamma,\delta]\subset(-1,1)$. Prandaj duke integruar dy herë parcialisht fitojmë

$$J_2=-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^3\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\frac{d}{dx}\tau_y(g,x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}\tau_y(g,x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}D_{x,2,2}\tau_y(g,x)\,f(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Nga barazimi (3.7) dhe barazimi i fundit rrjedh

$$J_2-J_1=\int_{-1}^{1}\left(D_{x,2,2}\tau_y(g,x)-\tau_y(D_{x,2,2}g,x)\right)f(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Por, për funksionin $g(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$ është vërtetuar barazimi (3.2) për pothuajse të gjithë $x\in[-1,1]$. Rrjedhimisht,

$$J_2-J_1=\int_{-1}^{1}\left(\tau_y(D_{x,2,2}f,x)-D_{x,2,2}\tau_y(f,x)\right)g(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx=0$$

për çdo y.

Meqë segmenti $[c,d]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$ është zgjedhur i çfarëdoshëm, kurse $g(x)$ – funksion i çfarëdoshëm pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë segmentit $[c,d]$, atëherë [32, f. 41]

$$\tau_y(D_{x,2,2}f,x)=D_{x,2,2}\tau_y(f,x)$$

pothuajse kudo në $[-1,1]$ për y të fiksuar.

Barazimi (3.2) u vërtetua.

Vërtetojmë tani barazimin

$$\tau_y(D_{x,2,2}f,x)=D_{y,0,4}\tau_y(f,x)\,. \tag{3.8}$$

Sipas pohimit 2) kemi se për çdo x të fiksuar funksioni $\tau_y(f,x)$ ka derivat absolutisht të vazhdueshëm $\frac{d}{dy}\tau_y(f,x)$ në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$. Rrjedhimisht, ekziston $D_{y,0,4}\tau_y(f,x)$.

Le të jetë fillimisht $f(x)$ funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b]\subset(-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$. Atëherë,

$$I_1=\int_{-1}^{1}D_{y,0,4}\tau_y(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx$$
$$=D_{y,0,4}\int_{-1}^{1}\tau_y(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Duke zbatuar lemën 3.1.1 fitojmë

$$I_1=D_{y,0,4}\int_{-1}^{1}f(x)\tau_y\left(P_n^{(2,2)},x\right)\left(1-x^2\right)^2\,dx$$
$$=D_{y,0,4}P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1}f(x)P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Dihet se [36, f. 171]

$$D_{y,0,4}P_n^{(0,4)}(y) = -n(n+5)P_n^{(0,4)}(y).$$

Prandaj

$$I_1 = -n(n+5)P_n^{(0,4)}(y)\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Prej këtej, duke zbatuar barazimet (3.4) dhe (3.3) marrim

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \tau_y\left(D_{x,2,2}f, x\right) P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Rrjedhimisht,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} & D_{y,0,4}\tau_y(f,x)\,P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} \tau_y\left(D_{x,2,2}f, x\right) P_n^{(2,2)}(x)\left(1-x^2\right)^2 dx = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)\end{aligned}$$

që d.m.th. se, për y të fiksuar të gjithë koeficientët Fourier–Jacobi të funksionit

$$F_2(x) = D_{y,0,4}\tau_y(f,x) - \tau_y\left(D_{x,2,2}f, x\right)$$

sipas sistemit të polinomeve $\left\{P_n^{(2,2)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ anulohen. Prandaj $F_2(x) = 0$ pothuajse kudo në $[-1,1]$. Në këtë mënyrë barazimi (3.8) është vërtetuar për funksionin $f(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b] \subset (-1,-y) \cup (-y,y) \cup (y,1)$, për pothuajse të gjithë x dhe y nga $[-1,1]$.

Le të jetë tani $f(x)$ funksion që plotëson kushtet e lemës, d.m.th. me derivat $f'(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$. Le të jetë $g(x)$ funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d] \subset (-1,-y) \cup (-y,y) \cup (y,1)$. Atëherë, duke zbatuar lemën 3.1.1 kemi

$$\begin{aligned} J = \int_{-1}^{1} & D_{y,0,4}\tau_y(f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= D_{y,0,4}\int_{-1}^{1} \tau_y(f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= D_{y,0,4}\int_{-1}^{1} f(x)\tau_y(g,x)\left(1-x^2\right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} D_{y,0,4}\tau_y(g,x)\,f(x)\left(1-x^2\right)^2 dx.\end{aligned}$$

Meqë për funksionin $g(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohen jashtë segmentit $[c,d]$ është vërtetuar barazimi (3.8), kemi

$$J = \int_{-1}^{1} \tau_y\left(D_{x,2,2}g, x\right) f(x)\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Prej këtej, duke zbatuar barazimet (3.7) dhe (3.6) marrim

$$J = \int_{-1}^{1} D_{x,2,2}\tau_y(f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Duke zbatuar barazimin (3.2), të vërtetuar më parë, fitojmë

$$J = \int_{-1}^{1} \tau_y(D_{x,2,2}f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Në këtë mënyrë

$$\int_{-1}^{1} \left(D_{y,0,4}\tau_y(f,x) - \tau_y(D_{x,2,2}f,x)\right) g(x)\left(1-x^2\right)^2 dx = 0.$$

Tani barazimi (3.8) rrjedh nga arbitrariteti i funksionit $g(x)$.

Lema 3.1.2 u vërtetua në tërësi. ■

Rrjedhim 3.1.1. *Le të jenë r dhe l numra natyrorë dhe $f(x)$ funksion me derivat $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}f(x)$ të rendit $2r-1$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$. Për pothuajse çdo x dhe y kanë vend barazimet*

$$\tau^r_{y_1,\ldots,y_r}\left(D^l_{x,2,2}f,x\right) = D^l_{x,2,2}\tau^r_{y_1,\ldots,y_r}(f,x) \qquad (r=1,2,\ldots).$$

Vërtetim. Për $r=l=1$ barazimi i rrjedhimit rrjedh nga lema 3.1.2.

Le të jenë $l\geq 2$ dhe $r=1$. Është e qartë se operatori $D^{l-1}_{x,2,2}f(x)$ ka derivat $\frac{d}{dx}D^{l-1}_{x,2,2}f(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$. Prandaj sipas lemës 3.1.2 kemi

$$\tau_{y_1}\left(D^l_{x,2,2}f,x\right) = D_{x,2,2}\tau_{y_1}\left(D^{l-1}_{x,2,2}f,x\right).$$

Duke zbatuar këtë barazim l herë fitojmë

$$\tau_{y_1}\left(D^l_{x,2,2}f,x\right) = D^l_{x,2,2}\tau_{y_1}(f,x).$$

D.m.th., barazimi i rrjedhimit vlen për çdo $l\in\mathbb{N}$ dhe $r=1$.

Tani pohimi i rrjedhimit 3.1.1 vërtetohet lehtë duke zbatuar induksionin matematik. ■

Lemë 3.1.3. *Le te jetë $f(x)$ funksion me derivat $f'(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$ dhe $D_{x,2,2}f(x)\in L_{1,2}$. Për pothuajse çdo x kanë vend barazimet*

$$\tau_y(f,x) - f(x) = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v \tau_u(D_{x,2,2}f,x)(1+u)^4\,du\,dv$$

dhe

$$\begin{aligned}\tau_y(f,x) &- \tau_0(f,x)\\ &= -\int_0^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_v^{-1} \tau_u(D_{x,2,2}f,x)(1+u)^4\,du\,dv.\end{aligned}$$

Vërtetim. Vërtetojmë barazimin e parë të lemës. Në qoftë se $f(x)$ është funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b] \subset (-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$, atëherë nga lema 3.1.2 rrjedh se funksioni $\frac{d}{du}\tau_u\,(f,x)$ është i kufizuar. Duke zbatuar lemat 3.1.2 dhe 3.1.1 fitojmë

$$\begin{aligned}\int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v \tau_u\,(D_{x,2,2}f,x)\,(1+u)^4\,du\,dv \\ = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v D_{u,0,4}\tau_u\,(f,x)\,(1+u)^4\,du\,dv \\ = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v \frac{d}{du}(1-u)(1+u)^5\frac{d}{du}\tau_u\,(f,x)\;du\,dv \\ = \tau_y\,(f,x) - \tau_1\,(f,x) = \tau_y\,(f,x) - f(x)\end{aligned}$$

për pothuajse çdo $x \in [-1,1]$.

Le të jetë tani $f(x)$ funksion me derivat $f'(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$. Le të jetë $g(x)$ funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d] \subset (-1,-y)\cup(-y,y)\cup(y,1)$. Atëherë,

$$\begin{aligned}J_1 = \int_{-1}^1\int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \\ \times \int_1^v \tau_u\,(D_{x,2,2}f,x)\,(1+u)^4 g(x)\left(1-x^2\right)^2\,du\,dv\,dx \\ = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v (1+u)^4 \\ \times \int_{-1}^1 \tau_u\,(D_{x,2,2}f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx\,du\,dv.\end{aligned}$$

Le të jetë

$$J_2 = \int_{-1}^1 \tau_u\,(D_{x,2,2}f,x)\,g(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Sipas lemës 3.1.1

$$J_2 = \int_{-1}^1 D_{x,2,2}f(x)\tau_u\,(g,x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Meqë, siç është treguar gjatë vërtetimit të lemës 3.1.2, $\tau_u\,(g,x) = 0$ jashtë ndonjë segmenti $[\gamma,\delta] \subset (-1,1)$, duke integruar dy herë parcialisht fitojmë

$$J_2 = \int_{-1}^1 D_{x,2,2}\tau_u\,(g,x)\,f(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx.$$

Rrjedhimisht, duke zbatuar lemën 3.1.3,

$$\begin{aligned}J_1 = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v (1+u)^4 \\ \times \int_{-1}^1 D_{x,2,2}\tau_u\,(g,x)\,f(x)\left(1-x^2\right)^2\,dx\,du\,dv = \int_{-1}^1 f(x)\left(1-x^2\right)^2 \\ \times \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5}\int_1^v \tau_u\,(D_{x,2,2}g,x)\,(1+u)^4\,du\,dv\,dx.\end{aligned}$$

Por për funksionin $g(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d] \subset (-1,-y) \cup (-y,y) \cup (y,1)$ është vërtetuar barazimi i parë i lemës për pothuajse çdo $x \in [-1,1]$. Prandaj

$$J_1 = \int_{-1}^{1} \left(\tau_y(g,x) - g(x)\right) f(x) \left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Duke zbatuar lemën 3.1.1 fitojmë

$$J_1 = \int_{-1}^{1} \left(\tau_y(f,x) - f(x)\right) g(x) \left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Prej këtej, në saje të arbitraritetit të funksionit $g(x)$ marrim [32, f. 41]

$$\tau_y(f,x) - f(x) = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \int_1^v \tau_u(D_{x,2,2}f,x)(1+u)^4\, du\, dv$$

për pothuajse çdo x.

Barazimi i parë i lemës u vërtetua.

Vërtetojmë tani barazimin e dytë të lemës. Në mënyrë analoge sikur mësipër, për funksionin $f(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[a,b] \subset (-1,-y) \cup (-y,y) \cup (y,1)$, duke zbatuar lemën 3.1.2 fitojmë

$$\begin{aligned} -\int_0^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} &\int_v^{-1} \tau_u(D_{x,2,2}f,x)(1+u)^4\, du\, dv \\ &= -\int_0^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \int_v^{-1} D_{u,0,4}\tau_u(f,x)(1+u)^4\, du\, dv \\ &= -\int_0^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \int_v^{-1} \frac{d}{du}(1-u)(1+u)^5 \frac{d}{du}\tau_u(f,x)\, du\, dv \\ &\qquad = \tau_y(f,x) - \tau_0(f,x) \end{aligned}$$

për pothuajse çdo $x \in [-1,1]$.

Le të jetë tani $f(x)$ funksion me derivat $f'(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$. Le të jetë $g(x)$ funksion pafundësisht i derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d] \subset (-1,-y) \cup (-y,y) \cup (y,1)$. Vejmë

$$\begin{aligned} J_3 = -\int_{-1}^{1} \int_0^y &(1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \\ &\times \int_v^{-1} \tau_u(D_{x,2,2}f,x)(1+u)^4 g(x) \left(1-x^2\right)^2 du\, dv\, dx. \end{aligned}$$

Në mënyrë plotësisht analoge sikurse gjatë vërtetimit të barazimit të parë të lemës fitohet

$$\begin{aligned} J_3 = -\int_{-1}^{1} f(x)\left(1-x^2\right)^2 &\int_0^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \\ &\times \int_v^{-1} \tau_u(D_{x,2,2}g,x)(1+u)^4\, du\, dv\, dx. \end{aligned}$$

Meqë për funksionin $g(x)$ pafundësisht të derivueshëm që anulohet jashtë ndonjë segmenti $[c,d] \subset (-1,-y) \cup (-y,y) \cup (y,1)$ vlen barazimi i dytë i lemës për pothuajse çdo $x \in [-1,1]$, kemi

$$J_3 = \int_{-1}^{1} \left(\tau_y(g,x) - \tau_0(g,x)\right) f(x) \left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Duke zbatuar lemën 3.1.1 fitojmë

$$J_3 = \int_{-1}^{1} \left(\tau_y(f,x) - \tau_0(f,x)\right) g(x) \left(1-x^2\right)^2 dx.$$

Prej këtej, në saje të arbitraritetit të funksionit $g(x)$ fitohet barazimi i dytë i lemës.

Lema 3.1.3 u vërtetua. ∎

Rrjedhim 3.1.2. *Le te jetë $f(x)$ funksion me derivat $f'(x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$ dhe $D_{x,2,2}f(x) \in L_{1,2}$. Për pothuajse çdo x dhe çdo $t \in (-\pi,\pi)$ kanë vend barazimet*

$$\hat{\tau}_t(f,x) - f(x) = \int_0^t \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9} \int_0^v \hat{\tau}_u(D_{x,2,2}f,x) \left(\sin\frac{u}{2}\right) \left(\cos\frac{u}{2}\right)^9 du\,dv$$

dhe

$$\hat{\tau}_t(f,x) - \hat{\tau}_{\pi/2}(f,x) = -\int_{\pi/2}^t \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9} \int_v^\pi \hat{\tau}_u(D_{x,2,2}f,x) \left(\sin\frac{u}{2}\right) \left(\cos\frac{u}{2}\right)^9 du\,dv.$$

Barazimi i parë implikohet drejtpërdrejt nga barazimi i parë i lemës 3.1.3, duke zëvendësuar $\cos u$ dhe $\cos v$ në vend të u, respektivisht v. Në mënyrë analoge, barazimi i dytë rrjedh nga barazimi i dytë i lemës 3.1.3.

Pohimi i teoremës vijuese është analog me atë të teoremës 2.1.1 për operatorin $T_y(f,x)$ dhe trajton kufizueshmërinë e operatorit $\tau_y(f,x)$.

Teoremë 3.1.1. *Le të jenë dhënë numrat p dhe α të tillë që $1 \le p \le \infty$;*

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2} < \alpha \le 1 & \text{për } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} < \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \le \alpha < \frac{3}{2} & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Le të jetë $f \in L_{p,\alpha}$. Vlen mosbarazimi

$$\|\hat{\tau}_t(f,x)\|_{p,\alpha} \le \frac{C}{\cos^4\frac{t}{2}} \|f\|_{p,\alpha},$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t.

Vërtetim. Le të jetë

$$I = \|\hat{\tau}_t(f,x)\|_{p,\alpha} = \frac{1}{\pi\cos^4\frac{t}{2}} \left\| \frac{1}{1-x^2} \int_{-1}^{1} B_{\cos t}(x,z,R) f(R) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha},$$

ku R dhe $B_{\cos t}(x,z,R)$ janë dhënë në (1.1), përkatësisht (1.2). Duke zbatuar lemën 1.2.4 fitojmë

$$|B_{\cos t}(x,z,R)| \le 2\left(\left|y\sqrt{1-x^2}-xz\sqrt{1-y^2}\right|+2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}\right)^2+1-R^2$$
$$\le 19\left(1-R^2\right).$$

Tani, duke zbatuar rrjedhimin 1.2.2 fitojmë

$$I \le \frac{C_1}{\cos^4\frac{t}{2}}\left\|\frac{1}{1-x^2}\int_{-1}^{1}\left(1-R^2\right)|f(R)|\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_2}{\cos^4\frac{t}{2}}\|f\|_{p,\alpha}.$$

Teorema 3.1.1 u vërtetua. ■

Rrjedhim 3.1.3. *Le të jenë dhënë numrat p, α dhe r të tillë që $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}<\alpha\le 1 & \text{për } p=1, \\ 1-\frac{1}{2p}<\alpha<\frac{3}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty, \\ 1\le\alpha<\frac{3}{2} & \text{për } p=\infty. \end{array}$$

Le të jetë $f\in L_{p,\alpha}$. Vlen mosbarazimi

$$\left\|\hat{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C}{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{4r}}\|f\|_{p,\alpha},$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t_j $(j=1,2,\ldots,r)$.

Vërtetim. Në mënyrë analoge sikur gjatë vërtetimit të rrjedhimit 2.1.2 mund të tregohet se operatori $\hat{\Delta}^r_t(f,x)$ i diferencës së përgjithësuar të rendit r paraqitet si kombinim linear i fuqive $\hat{\tau}^k_{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}}(f,x)$ $(i_1<i_2<\cdots<i_k; k=1,2,\ldots,r)$ të operatorit përkatës të translacionit të përgjithësuar. Tani, pohimi i rrjedhimit 3.1.3 vërtetohet duke zbatuar r herë teoremën 3.1.1. ■

Rezultati vijues paraqet vlerësimin nga sipër të modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$, të përkufizuar përmes operatorit $\tau_y(f,x)$, me anë të operatorit të diferencimit $D^r_{x,2,2}f(x)$.

Teoremë 3.1.2. *Le të jenë dhënë numrat p, α dhe r të tillë që $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}<\alpha\le 1 & \text{për } p=1, \\ 1-\frac{1}{2p}<\alpha<\frac{3}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty, \\ 1\le\alpha<\frac{3}{2} & \text{për } p=\infty. \end{array}$$

Le të jetë $f(x)\in AD^r(p,\alpha)$. Për $0\le\delta<\pi$ vlen mosbarazimi

$$\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha} \le \frac{C}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r}}\delta^{2r}\left\|D^r_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha},$$

ku C është konstantë e cila nuk varet nga f dhe δ.

Vërtetim. Vërtetojmë së pari se për $|t_j|<\pi$ $(j=1,2,\ldots,r)$ ka vend barazimi

$$\left\|\hat{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_1}{\prod_{j=1}^r\cos^4\frac{t_j}{2}}t_1^2\ldots t_r^2\left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}, \tag{3.9}$$

ku C_1 është konstantë e cila nuk varet nga f dhe t_j $(j=1,2,\ldots,r)$.

Le të jetë $r=1$. Vërtetojmë mosbarazimin (3.9) për $0<t_1\le\frac{\pi}{2}$. Sipas rrjedhimit 3.1.2 kemi

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\|\hat{\tau}_{t_1}(f,x)-f(x)\right\|_{p,\alpha}\\
&= \left\|\int_0^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_0^{v}\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}f,x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{9}du\,dv\right\|_{p,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Duke zbatuar mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t dhe teoremën 3.1.1 fitojmë

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le \int_0^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\\
&\qquad\times\int_0^{v}\left\|\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}f,x\right)\right\|_{p,\alpha}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{9}du\,dv\\
&\le C_2\left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}\int_0^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_0^{v}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{5}du\,dv.
\end{aligned}
$$

Prej këtej, duke marrë parasysh se për $0<t_1\le\frac{\pi}{2}$ vlen

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_0^{v}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{5}du\,dv\\
&\qquad\le\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-9}\int_0^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\int_0^{v}\sin\frac{u}{2}\,du\,dv\\
&\qquad\qquad\le\left(\sqrt{2}\right)^{9}\int_0^{t_1}\int_0^{v}du\,dv\le\left(\sqrt{2}\right)^{9}t_1^2,
\end{aligned}
$$

fitojmë

$$
I_1\le C_3t_1^2\left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}\le\frac{C_3}{\cos^4\frac{t_1}{2}}t_1^2\left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}.
$$

Le të jetë $\frac{\pi}{2}\le t_1<\pi$. Atëherë, sipas rrjedhimit 3.1.2 kemi

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left\|\hat{\tau}_{t_1}(f,x)-\hat{\tau}_{\pi/2}(f,x)\right\|_{p,\alpha}\\
&= \left\|\int_{\pi/2}^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\right.\\
&\qquad\left.\times\int_v^{\pi}\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}f,x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{9}du\,dv\right\|_{p,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Duke zbatuar së pari mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t, pastaj teoremën 3.1.1 fitojmë

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \int_{\pi/2}^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\\
&\qquad\times\int_v^{\pi}\left\|\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}f,x\right)\right\|_{p,\alpha}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{9}du\,dv\\
&\le C_4\left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}\int_{\pi/2}^{t_1}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_v^{\pi}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{5}du\,dv.
\end{aligned}
$$

Më tutje, duke marrë parasysh se për $\frac{\pi}{2} \le t_1 < \pi$ vlen

$$\int_{\pi/2}^{t_1} \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9} \int_v^{\pi} \left(\sin\frac{u}{2}\right) \left(\cos\frac{u}{2}\right)^{5} du\,dv$$
$$\le \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \left(\cos\frac{t_1}{2}\right)^{-4} \int_{\pi/2}^{t_1} \int_v^{\pi} du\,dv \le \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4\cos^4\frac{t_1}{2}},$$

fitojmë

$$I_2 \le \frac{C_5}{\cos^4\frac{t_1}{2}} \left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_5}{\cos^4\frac{t_1}{2}} t_1^2 \left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}. \tag{3.10}$$

Meqë

$$\left\|\hat{\tau}_{t_1}\,(f,x) - f(x)\right\|_{p,\alpha} \le \left\|\hat{\tau}_{t_1}\,(f,x) - \hat{\tau}_{\pi/2}\,(f,x)\right\|_{p,\alpha} + \left\|\hat{\tau}_{\pi/2}\,(f,x) - f(x)\right\|_{p,\alpha},$$

duke zbatuar mosbarazimin (3.10) dhe rastin $0 < t_1 \le \frac{\pi}{2}$ të mosbarazimit (3.9) për $r = 1$ të vërtetuar më parë, gjejmë se për $\frac{\pi}{2} \le t_1 < \pi$ vlen

$$\left\|\hat{\tau}_{t_1}\,(f,x) - f(x)\right\|_{p,\alpha} \le \left(\frac{C_5}{\cos^4\frac{t_1}{2}} t_1^2 + C_6\right) \left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}$$
$$\le \frac{C_7}{\cos^4\frac{t_1}{2}} t_1^2 \left\|D_{x,2,2}f(x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Në këtë mënyrë, për $r = 1$ mosbarazimi (3.9) është vërtetuar për $0 < t_1 < \pi$.

Për $t_1 = 0$ mosbarazimi (3.9) është evident. Meqë

$$\tau_{\cos t_1}\,(f,x) = \tau_{\cos(-t_1)}\,(f,x),$$

mund të konsiderojmë se mosbarazimi (3.9) vlen për $r = 1$ dhe $|t_1| < \pi$.

Supozojmë tani se mosbarazimi (3.9) vlen për ndonjë $r \in \mathbb{N}$. Ashtu sikur gjatë vërtetimit për $r = 1$, duke marrë $\hat{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}\,(f,x)$ në vend të $f(x)$ dhe duke pasur parasysh se sipas lemës 3.1.2 dhe teoremës 3.1.1, $f(x) \in AD^{r+1}(p,\alpha)$ implikon $\hat{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}\,(f,x) \in AD^{r+1}(p,\alpha)$, fitojmë

$$\left\|\hat{\Delta}^{r+1}_{t_1,\ldots,t_{r+1}}\,(f,x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_8}{\cos^4\frac{t_{r+1}}{2}} t_{r+1}^2 \left\|D_{x,2,2}\hat{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}\,(f,x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Duke zbatuar rrjedhimin 3.1.1 fitojmë

$$\left\|\hat{\Delta}^{r+1}_{t_1,\ldots,t_{r+1}}\,(f,x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_9}{\cos^4\frac{t_{r+1}}{2}} t_{r+1}^2 \left\|\hat{\Delta}^r_{t_1,\ldots,t_r}\,(D_{x,2,2}f,x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Duke pasur parasysh se $f(x) \in AD^{r+1}(p,\alpha)$ implikon $D_{x,2,2}f(x) \in AD^r(p,\alpha)$, në bazë të induksionit matematik mosbarazimi (3.9) u vërtetua.

Duke kaluar në mosbarazimin (3.9) në supremum sipas të gjithë t_j, $|t_j| < \delta$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, fitojmë mosbarazimin e teoremës.

Teorema 3.1.2 u vërtetua. ■

Vërejmë se vetia analoge me teoremën 3.1.2 për modulin e zakonshëm të lëmueshmërisë është dhënë p.sh. në [39, f. 116].

§ 3.2. Mbi disa veti të operatorëve $H\,(f,x)$ dhe $H_\delta\,(f,x)$

Në vazhdim do të shqyrojmë vetitë e operatorëve $H\,(f,x)$ dhe $H_\delta\,(f,x)$, të cilat do të përdoren si pohime ndihmëse gjatë vërtetimit të rezultateve nga pika vijuese. Në bazë të vetive që do të vërtetohen në këtë pikë, është evidente analogjia e lidhmërisë së operatorëve H dhe H_δ ndaj operatorit të derivimit $D_{x,2,2}$ me lidhmërinë e integralit, respektivisht integralit të caktuar ndaj derivatit të zakonshëm të funksionit. Prej këtej, kushtimisht operatorët H dhe H_δ mund të konsiderohen si operatorë të integrimit, përkatësisht integrimit të caktuar.

Lemë 3.2.1. *Le të jenë dhënë numrat p dhe α të tillë që $1 \le p \le \infty$;*

$$\begin{array}{cl} -1 < \alpha \le 2 & \textit{për } p = 1, \\ -\frac{1}{p} < \alpha < 3 - \frac{1}{p} & \textit{për } 1 < p < \infty, \\ 0 \le \alpha < 3 & \textit{për } p = \infty. \end{array}$$

Në qoftë se $f(x) \in L_{p,\alpha}$, atëherë $H\,(f,x) \in L_{p,\alpha}$.

Vërtetim. Siç kemi treguar gjatë vërtetimit të teoremës 2.2.2, nën kushtet e teoremës, $f \in L_{p,\alpha}$ implikon $f \in L_{1,2}$. D.m.th. ekziston $H\,(f,x)$.

Për $1 \le p < \infty$ vejmë

$$I = \|H\,(f,x)\|_{p,\alpha}^p = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{p\alpha} |H\,(f,x)\,|^p \,dx.$$

Le të jetë $p = 1$. Shqyrtojmë

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\alpha} |H\,(f,x)\,|\,dx \\ &\le \int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\alpha} \int_0^x \left(1-y^2\right)^{-3} \int_y^1 \left(1-z^2\right)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz\,dy\,dx. \end{aligned}$$

Është evidente se

$$I_1 \le C_1 \int_0^1 (1-x)^{\alpha} \int_0^x (1-y)^{-3} \int_y^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz\,dy\,dx.$$

Duke ndërruar renditjen e integrimit dhe duke marrë parasysh se $-1 < \alpha \le 2$

fitojmë[1]

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le C_1 \int_0^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \int_0^z (1-y)^{-3} \int_y^1 (1-x)^\alpha \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{C_1}{\alpha+1} \int_0^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \int_0^z (1-y)^{\alpha-2} \, dy \, dz \\
&\le C_2 \int_0^1 (1-z)^\alpha z \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \le C_2 \left\| f - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{1,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Meqë $f \in L_{1,\alpha}$ dhe $\alpha > -1$, kemi

$$I_1 < \infty.$$

Shqyrtojmë

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^0 \left(1-x^2\right)^\alpha |H(f,x)| \, dx \\
&= \int_{-1}^0 \left(1-x^2\right)^\alpha \left| \int_0^x \left(1-y^2\right)^{-3} \int_y^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz \, dy \right| dx.
\end{aligned}
$$

Nga përkufizimi i c_1 dhe c_0 rrjedh

$$\int_{-1}^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz = 0.$$

Prandaj

$$\int_y^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz = -\int_{-1}^y \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz. \tag{3.11}$$

Prej këtej marrim

$$I_2 \le C_3 \int_{-1}^0 (1+x)^\alpha \int_x^0 (1+y)^{-3} \int_{-1}^y (1+z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \, dy \, dx.$$

Duke ndërruar renditjen e integrimit[2] fitojmë

$$I_2 \le C_3 \int_{-1}^0 (1+z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \int_z^0 (1+y)^{-3} \int_{-1}^y (1+x)^\alpha \, dx \, dy \, dz.$$

[1]Kemi

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_y^1 (\cdot) \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\min\{x,z\}} (\cdot) \, dy \, dz \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\min\{x,z\}} (\cdot) \, dy \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^z \int_y^1 (\cdot) \, dx \, dy \, dz.
\end{aligned}
$$

[2]Kemi

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \int_x^0 \int_{-1}^y (\cdot) \, dz \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{\max\{x,z\}}^0 (\cdot) \, dy \, dz \, dx \\
&= \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{\max\{x,z\}}^0 (\cdot) \, dy \, dx \, dz = \int_{-1}^0 \int_z^0 \int_{-1}^y (\cdot) \, dx \, dy \, dz.
\end{aligned}
$$

Prej këtej, me rezonim analog sikurse në rastin e mëparmë fitojmë

$$I_2 < \infty.$$

Kështu, për $p = 1$ është vërtetuar se

$$I = I_1 + I_2 < \infty.$$

D.m.th., $H\,(f,x) \in L_{1,\alpha}$.

Le të jetë $1 < p < \infty$. Kemi

$$|H\,(f,x)\,| \le \int_0^x \left(1-y^2\right)^{-3} \int_y^1 \left(1-z^2\right)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz\, dy.$$

Shqyrtojmë

$$I_3 = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^{p\alpha} |H\,(f,x)\,|^p\, dx.$$

Le të jetë $0 \le x \le 1$. Zgjedhim numrin γ të tillë që

$$\max\left\{\alpha - 3 + \frac{1}{p}, -2 - \frac{1}{p}\right\} < \gamma < \min\{0, \alpha - 2\}.$$

Duke zbatuar në integralin e jashtëm mosbarazimin e Hölder-it, duke pasur parasysh se $\gamma > -2 - \frac{1}{p}$ fitojmë

$$\begin{aligned}
|H\,(f,x)\,|^p &\le C_4 \left(\int_0^x (1-y)^{-3} \int_y^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz\, dy \right)^p \\
&\le C_4 \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \left\{ \int_y^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \right\}^p dy \\
&\qquad \times \left\{ \int_0^x (1-y)^{(-3-\gamma)\frac{p}{p-1}}\, dy \right\}^{p-1} \\
&\le C_5 (1-x)^{p(-2-\gamma)-1} \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \left\{ \int_y^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \right\}^p dy.
\end{aligned}$$

Duke zbatuar tani mosbarazimin e Hölder-it në integralin e brendshëm, duke pasur parasysh se $\gamma > \alpha - 3 + \frac{1}{p}$ gjejmë

$$\begin{aligned}
|H\,(f,x)\,|^p &\le C_5 (1-x)^{p(-2-\gamma)-1} \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \\
&\quad \times \int_y^1 (1-z)^{p(\alpha-\gamma)} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p dz \left\{ \int_y^1 (1-z)^{(2-\alpha+\gamma)\frac{p}{p-1}}\, dz \right\}^{p-1} dy \\
&\le C_6 (1-x)^{p(-2-\gamma)-1} \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \int_y^1 (1-z)^{p(\alpha-\gamma)} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p dz\, dy.
\end{aligned}$$

Prej këtej marrim

$$\begin{aligned}
I_3 \le C_6 \int_0^1 (1-x)^{p(\alpha-2-\gamma)-1} \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \\
\times \int_y^1 (1-z)^{p(\alpha-\gamma)} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p dz\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

Duke ndërruar renditjen e integrimit dhe duke marrë parasysh se $\gamma < \alpha - 2$ dhe $\gamma < 0$ fitojmë

$$\begin{aligned}I_3 &\le C_6 \int_0^1 (1-z)^{p(\alpha-\gamma)} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right|^p \\ &\qquad\times \int_0^z (1-y)^{p\gamma} \int_y^1 (1-x)^{p(\alpha-2-\gamma)-1}\, dx\, dy\, dz \\ &\le C_7 \int_0^1 (1-z)^{p(\alpha-\gamma)} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right|^p \int_0^z (1-y)^{p\gamma}\, dy\, dz \\ &\le C_7 \int_0^1 (1-z)^{p\alpha} z \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right|^p dz \le C_7 \left\| f - \frac{c_1}{c_0}\right\|_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Duke pasur parasysh se $f \in L_{p,\alpha}$ dhe $\alpha > -\frac{1}{p}$ kemi

$$I_3 < \infty.$$

Vejmë

$$I_4 = \int_{-1}^0 \left(1-x^2\right)^{p\alpha} |H(f,x)|^p\, dx.$$

Duke marrë parasysh barazimin (3.11) kemi

$$H(f,x) = \int_0^x \left(1-y^2\right)^{-3} \int_{-1}^y \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right) dz\, dy.$$

Prej këtej, për $-1 \le x \le 0$ marrim

$$|H(f,x)|^p \le C_8 \int_x^0 (1+y)^{-3} \int_{-1}^y (1+z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right| dz\, dy.$$

Me rezonim analog sikur gjatë vlerësimit të I_3, d.m.th. duke aplikuar dy herë mosbarazimin e Hölder-it, pastaj duke ndërruar renditjen e integrimit fitojmë

$$I_4 < \infty.$$

Tani

$$I = \|H(f,x)\|_{p,\alpha}^p = I_3 + I_4 < \infty.$$

Kështu kemi vërtetuar se për $1 \le p < \infty$ vlen $H(f,x) \in L_{p,\alpha}$.

Le të jetë $p = \infty$. Vejmë

$$J = \max_{-1\le x\le 1} \left(1-x^2\right)^\alpha |H(f,x)|.$$

Le të jetë

$$J_1 = \max_{0\le x\le 1} \left(1-x^2\right)^\alpha |H(f,x)|.$$

Atëherë,

$$\begin{aligned}J_1 &\le \max_{0\le x\le 1} \left(1-x^2\right)^\alpha \int_0^x \left(1-y^2\right)^{-3} \int_y^1 \left(1-z^2\right)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right| dz\, dy \\ &\le \left\| f - \frac{c_1}{c_0}\right\|_{\infty,\alpha} \max_{0\le x\le 1} \left(1-x^2\right)^\alpha \int_0^x \left(1-y^2\right)^{-3} \int_y^1 \left(1-z^2\right)^{2-\alpha} dz\, dy.\end{aligned}$$

Duke pasur parasysh se $f \in L_{\infty,\alpha}$ kemi

$$J_1 \le C_9 \max_{0\le x\le 1}(1-x)^\alpha \int_0^x (1-y)^{-3} \int_y^1 (1-z)^{2-\alpha}\, dz\, dy.$$

Prej këtej, për $0 \le \alpha < 3$ marrim

$$J_1 \le C_{10} \max_{0\le x\le 1}(1-x)^\alpha \int_0^x (1-y)^{-\alpha}\, dy < \infty.$$

Le të jetë

$$J_2 = \max_{-1\le x\le 0} \left(1-x^2\right)^\alpha |H(f,x)|.$$

Atëherë, duke marrë parasysh barazimin (3.11), sipas analogjisë me vlerësimin e J_1 kemi

$$J_2 \le \left\| f - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{\infty,\alpha} \max_{-1\le x\le 0}(1+x)^\alpha \int_x^0 (1+y)^{-3} \int_{-1}^y (1+z)^{2-\alpha}\, dz\, dy < \infty.$$

Kështu, për $p = \infty$ vlen

$$J = \max\{J_1, J_2\} < \infty,$$

d.m.th. $H(f,x) \in L_{\infty,\alpha}$.

Lema 3.2.1 u vërtetua në tërësi. ■

Lemë 3.2.2. *Le të jenë dhënë numrat p dhe α të tillë që $1 \le p \le \infty$;*

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{p} < \alpha < 3 - \frac{1}{p} & \text{për } 1 \le p < \infty, \\ 0 \le \alpha < 3 & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Në qoftë se $f(x) \in L_{p,\alpha}$, atëherë $\frac{d}{dx}H(f,x)$ është funksion absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$ dhe $\frac{d}{dx}H(f,x) \in L_{p,\alpha}$.

Vërtetim. Nga përkufizimi i $H(f,x)$ kemi

$$\frac{d}{dx}H(f,x) = -\left(1-x^2\right)^{-3} \int_x^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right) dz,$$

prej nga konkludojmë se $\frac{d}{dx}H(f,x)$ është funksion absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$.

Le të jetë $1 \le p < \infty$ dhe

$$I = \left\| \frac{d}{dx}H(f,x) \right\|_{p,\alpha}^p = \int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{\alpha-3} \left| \int_x^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right) dz \right|^p dx.$$

Në fillim shqyrtojmë rastin $p = 1$. Shqyrtojmë

$$I_1 = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\alpha-3} \left| \int_x^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0}\right) dz \right| dx \le C_1 \int_0^1 (1-x)^{\alpha-3} \int_x^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz\, dx.$$

Duke ndërruar renditjen e integrimit, për $-1<\alpha<2$ dhe $f \in L_{1,\alpha}$ kemi

$$I_1 \le C_1 \int_0^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \int_0^z (1-x)^{\alpha-3}\, dx\, dz$$
$$\le C_2 \int_0^1 (1-z)^\alpha \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \le C_2 \left\| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{1,\alpha} < \infty.$$

Le të jetë

$$I_2 = \int_{-1}^0 \left(1-x^2\right)^{\alpha-3} \left| \int_x^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz \right| dx.$$

Në mënyrë analoge sikur gjatë vlerësimit të I_1, duke marrë parasysh barazimin (3.11), fitojmë

$$I_2 < \infty.$$

Tani, nga $I_1 < \infty$ dhe $I_2 < \infty$ rrjedh

$$I = I_1 + I_2 < \infty,$$

d.m.th. $\frac{d}{dx} H(f,x) \in L_{1,\alpha}$.

Le të jetë $1<p<\infty$. Shqyrtojmë

$$I_3 = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^{p(\alpha-3)} \left| \int_x^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz \right|^p dx$$
$$\le C_3 \int_0^1 (1-x)^{p(\alpha-3)} \left\{ \int_x^1 (1-z)^2 \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \right\}^p dx.$$

Le të jetë $\alpha < \gamma < 3 - \frac{1}{p}$. Duke zbatuar mosbarazimin e Hölder-it, pastaj duke ndërruar renditjen e integrimit fitojmë

$$I_3 \le C_3 \int_0^1 (1-x)^{p(\alpha-3)} \int_x^1 (1-z)^{p\gamma} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p dz$$
$$\times \left\{ \int_x^1 (1-z)^{(2-\gamma)\frac{p}{p-1}} dz \right\}^{p-1} dx$$
$$= C_4 \int_0^1 (1-x)^{p(\alpha-\gamma)-1} \int_x^1 (1-z)^{p\gamma} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p dz\, dx$$
$$= C_4 \int_0^1 (1-z)^{p\gamma} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p \int_0^z (1-x)^{p(\alpha-\gamma)-1}\, dx\, dz$$
$$= C_5 \int_0^1 (1-z)^{p\alpha} \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right|^p dz \le C_5 \left\| f - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{p,\alpha}.$$

Prej këtej, duke pasur parasysh se $f \in L_{p,\alpha}$ dhe $\alpha > \frac{1}{p}$ marrim

$$I_3 < \infty.$$

Shqyrtojmë

$$I_4 = \int_{-1}^0 \left(1-x^2\right)^{p(\alpha-3)} \left| \int_x^1 \left(1-z^2\right)^2 \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz \right|^p dx.$$

Në mënyrë analoge sikur gjatë vlerësimit të I_3, duke zbatuar barazimin (3.11) fitojmë
$$I_4<\infty.$$

Tani
$$I=I_3+I_4<\infty.$$

Kështu është vërtetuar se për $1\le p<\infty$ vlen $\frac{d}{dx}H\left(f,x\right)\in L_{p,\alpha}$.

Le të jetë tani $p=\infty$. Shqyrtojmë

$$J=\max_{-1\le x\le 1}\left(1-x^2\right)^{\alpha}\left|\frac{d}{dx}H\left(f,x\right)\right|$$
$$=\max_{-1\le x\le 1}\left(1-x^2\right)^{\alpha-3}\left|\int_x^1\left(1-z^2\right)^2\left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right)dz\right|.$$

Për $\alpha<3$ kemi

$$J_1=\max_{0\le x\le 1}\left(1-x^2\right)^{\alpha-3}\left|\int_x^1\left(1-z^2\right)^2\left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right)dz\right|$$
$$\le\left\|f-\frac{c_1}{c_0}\right\|_{\infty,\alpha}\max_{0\le x\le 1}(1-x)^{\alpha-3}\int_x^1(1-z)^{2-\alpha}\,dz=C_6\left\|f-\frac{c_1}{c_0}\right\|_{\infty,\alpha}.$$

Prej këtej, për $f\in L_{\infty,\alpha}$ dhe $\alpha\ge 0$ marrim

$$J_1<\infty.$$

Në mënyrë analoge, duke zbatuar barazimin (3.11) fitojmë

$$J_2=\max_{-1\le x\le 0}\left(1-x^2\right)^{\alpha-3}\left|\int_x^1\left(1-z^2\right)^2\left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right)dz\right|<\infty.$$

Kështu
$$J=\max\{J_1,J_2\}<\infty,$$
d.m.th. $\frac{d}{dx}H\left(f,x\right)\in L_{\infty,\alpha}$.

Lema 3.2.2 u vërtetua. ■

Lemë 3.2.3. *Le të jetë $r\in\mathbb{N}$ dhe $f\in L_{1,2}$. Kanë vend barazimet vijuese*

$$D^l_{x,2,2}H^r\left(f,x\right)=H^{r-l}\left(f,x\right)-\frac{c_{r-l+1}}{c_0}\qquad(l=1,2,\dots,r-1)$$

dhe
$$D^r_{x,2,2}H^r\left(f,x\right)=f(x)-\frac{c_1}{c_0},\tag{3.12}$$

ku $c_{r-l+1}=\int_{-1}^1\left(1-z^2\right)^2H^{r-l}\left(f,z\right)dz$.

Vërtetim. Vërtetojmë së pari barazimin (3.12). Për $r=1$ kemi

$$D_{x,2,2}H\left(f,x\right)=-\left(1-x^2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^3\frac{d}{dx}\int_0^x\left(1-y^2\right)^{-3}$$
$$\times\int_y^1\left(1-z^2\right)^2\left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right)dz\,dy=f(x)-\frac{c_1}{c_0}.$$

Tani, duke marrë parasysh se sipas lemës 3.2.1 vlen $H^r(f,x) \in L_{1,2}$, barazimi (3.12) vërtetohet me induksion sipas r.

Nga barazimi i sapovërtetuar (3.12) rrjedh se për $r > 1$ dhe $l = 1, 2, \ldots, r-1$ kemi

$$D^l_{x,2,2}H^r(f,x) = D^l_{x,2,2}H^l\left(H^{r-l}(f,x), x\right) = H^{r-l}(f,x) - \frac{c_{r-l+1}}{c_0}.$$

Lema 3.2.3 u vërtetua. ■

Lemë 3.2.4. *Le të jenë dhënë numrat p, α dhe r të tillë që $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{p} < \alpha < 3 - \frac{1}{p} & \text{për } 1 \le p < \infty, \\ 0 \le \alpha < 3 & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Në qoftë se $f \in L_{p,\alpha}$, atëherë $H^r(f,x) \in AD^r(p,\alpha)$.

Vërtetim. Sipas lemës 3.2.1 kemi $H^r(f,x) \in L_{p,\alpha}$. Rrjedhimisht, siç është treguar gjatë vërtetimit të teoremës 2.2.2, nën kushtet e lemës kemi $f \in L_{1,2}$ dhe $H^r(f,x) \in L_{1,2}$. D.m.th., ekzistojnë konstantat c_r $(r = 1, 2, \ldots)$ të përkufizuara gjatë përkufizimit të $H^r(f,x)$.

Shqyrtojmë në fillim rastin $r = 1$. Sipas lemës 3.2.2 rrjedh se $\frac{d}{dx}H(f,x)$ është funksion absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$. Më tutje, sipas lemës 3.2.3 kemi

$$D_{x,2,2}H(f,x) = f(x) - \frac{c_1}{c_0},$$

dhe rrjedhimisht $D_{x,2,2}H(f,x) \in L_{p,\alpha}$. Nga lema 3.2.1 rrjedh se $H(f,x) \in L_{p,\alpha}$. Kështu, $H(f,x) \in AD^1(p,\alpha)$.

Tani, duke zbatuar formulën e Leibniz-it, pastaj lemat 3.2.1, 3.2.2 dhe 3.2.3 pohimi i lemës vërtetohet me anë të induksionit matematik. ■

Lemë 3.2.5. *Le të jetë $f \in L_{1,2}$. Vlejnë barazimet*

$$H^r_\delta(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}^r_\delta\left(H^r(f,x), x\right) + \frac{c_1}{c_0} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{3.13}$$

ku

$$\varkappa(\delta) = \int_0^\delta \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_0^v \left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9 du\, dv.$$

Vërtetim. Vërtetojmë së pari barazimin (3.13) për $r = 1$. Sipas lemës 3.2.3 kemi

$$f(x) = D_{x,2,2}H(f,x) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Prandaj

$$\begin{aligned} H_\delta(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta &\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9} \\ &\times \int_0^v \hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}H(f,x) + \frac{c_1}{c_0}, x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9 du\, dv. \end{aligned}$$

Meqë sipas vetive të operatorit $\hat{\tau}_u(f,x)$, të dhëna në lemën 3.1.1, vlen

$$\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}H(f,x)+\frac{c_1}{c_0},x\right)=\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}H(f,x),x\right)+\frac{c_1}{c_0},$$

fitojmë

$$H_\delta(f,x)=\frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\times\int_0^v\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}H(f,x),x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv+\frac{c_1}{c_0}.$$

Zbatojmë rrjedhimin 3.1.2, dhe duke marrë parasysh se sipas lemës 3.2.4 funksioni $H(f,x)$ ka derivat $\frac{d}{dx}H(f,x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$ fitojmë

$$H_\delta(f,x)=\frac{1}{\varkappa(\delta)}\hat{\Delta}_\delta\left(H(f,x),x\right)+\frac{c_1}{c_0}.$$

Supozojmë tani se për ndonjë $r\in\mathbb{N}$ vlen barazimi (3.13). Shqyrtojmë

$$\begin{aligned}H_\delta^{r+1}(f,x)&=\frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\times\int_0^v\hat{\tau}_u\left(H_\delta^r(f,x),x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv\\&=\frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\\&\times\int_0^v\hat{\tau}_u\left(\frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r\left(H^r(f,x),x\right)+\frac{c_1}{c_0},x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv.\end{aligned}$$

Sipas lemës 3.2.3 kemi

$$H^r(f,x)=D_{x,2,2}H^{r+1}(f,x)+\frac{c_{r+1}}{c_0}.$$

Prandaj

$$H_\delta^{r+1}(f,x)=\frac{1}{\varkappa(\delta)^{r+1}}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\times\int_0^v\hat{\tau}_u\left(\hat{\Delta}_\delta^r\left(D_{x,2,2}H^{r+1}(f,x)+\frac{c_{r+1}}{c_0},x\right),x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv+\frac{c_1}{c_0}.$$

Zbatojmë rrjedhimin 3.1.1, dhe duke marrë parasysh se $\hat{\Delta}_\delta^r\left(\frac{c_{r+1}}{c_0},x\right)=0$ fitojmë

$$H_\delta^{r+1}(f,x)=\frac{1}{\varkappa(\delta)^{r+1}}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\times\int_0^v\hat{\tau}_u\left(D_{x,2,2}\hat{\Delta}_\delta^r\left(H^{r+1}(f,x),x\right),x\right)\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv+\frac{c_1}{c_0}.$$

Tani, rrjedhimi 3.1.2 implikon

$$H_\delta^{r+1}(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^{r+1}} \times \left(\hat{\tau}_\delta\left(\hat{\Delta}_\delta^r\left(H^{r+1}(f,x),x\right),x\right) - \hat{\Delta}_\delta^r\left(H^{r+1}(f,x),x\right)\right) + \frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{\varkappa(\delta)^{r+1}}\hat{\Delta}_\delta^{r+1}\left(H^{r+1}(f,x),x\right) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Në saje të parimit të induksionit matematik, lema 3.2.5 u vërtetua. ■

Rrjedhim 3.2.1. *Le të jetë $f \in L_{1,2}$. Kanë vend barazimet*

$$D_{x,2,2}^r H_\delta^r(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r(f,x) \qquad (r = 1,2,\ldots).$$

Vërtetim. Sipas lemës 3.2.5 kemi

$$H_\delta^r(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r\left(H^r(f,x),x\right) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Meqë nga lema 3.2.4 rrjedh $H^r(f,x) \in AD^r(p,\alpha)$, atëherë sipas rrjedhimit 3.1.1 fitojmë

$$D_{x,2,2}^r H_\delta^r(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r} D_{x,2,2}^r \hat{\Delta}_\delta^r\left(H^r(f,x),x\right) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r\left(D_{x,2,2}^r H^r(f,x),x\right).$$

Duke zbatuar lemën 3.2.3 gjejmë

$$D_{x,2,2}^r H_\delta^r(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r\left(f - \frac{c_1}{c_0}, x\right) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r(f,x).$$

Rrjedhimi 3.2.1 u vërtetua. ■

Lemë 3.2.6. *Le të jenë dhënë numrat p, α, r dhe δ të tillë që $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \le \delta < \pi$;*

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2} < \alpha \le 1 & \text{për } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} < \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \le \alpha < \frac{3}{2} & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Në qoftë se $f \in L_{p,\alpha}$, atëherë $H_\delta^r(f,x) \in AD^r(p,\alpha)$.

Vërtetim. Meqë, siç është treguar gjatë vërtetimint të teoremës 2.2.2, nën kushtet e lemës kemi $f \in L_{1,2}$, atëherë sipas lemës 3.2.5 kemi

$$H_\delta^r(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r\left(H^r(f,x),x\right) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Sipas lemës 3.2.4 $H^r(f,x) \in AD^r(p,\alpha)$. Prandaj nga lema 3.1.2 rrjedh se $H_\delta^r(f,x)$ ka derivat $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}H_\delta^r(f,x)$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$. Duke zbatuar rrjedhimin 3.1.1, për $l = 1,2,\ldots,r$ kemi

$$D_{x,2,2}^l H_\delta^r(f,x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}_\delta^r\left(D_{x,2,2}^l H^r(f,x),x\right),$$

d.m.th., sipas lemave 3.2.4 dhe 3.1.2, $D^l_{x,2,2}H^r_\delta(f,x)$ është funksion absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$.

Duke zbatuar në barazimin e fundit lemën 3.2.3, për $l=1,2,\ldots,r$ fitojmë

$$D^l_{x,2,2}H^r_\delta(f,x)=\frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}^r_\delta\left(H^{r-l}(f,x)-\frac{c_{r-l+1}}{c_0},x\right)$$
$$=\frac{1}{\varkappa(\delta)^r}\hat{\Delta}^r_\delta\left(H^{r-l}(f,x),x\right).$$

Tani, duke zbatuar rrjedhimin 3.1.3 për δ të fiksuar, meqë sipas lemës 3.2.1 kemi $H^{r-l}(f,x)\in L_{p,\alpha}$, fitojmë $D^l_{x,2,2}H^r_\delta(f,x)\in L_{p,\alpha}$.

Kështu kemi treguar se $H^r_\delta(f,x)\in AD^r(p,\alpha)$.

Lema 3.2.6 u vërtetua. ■

§ 3.3. Mbi teoremën e Jackson-it për modulin e përgjithësuar të lëmueshmërisë

Më heret kemi theksuar se teoremat 2.2.4 dhe 2.3.2, përmes modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ japin karakteristikat strukturale të klasave të funksioneve të përkufizuara me anë të rendit të përafrimit më të mirë me polinome algjebrike. Por, ato njëkohësisht japin edhe karakteristikat konstruktive të funksionit f të tillë që $f\in H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$, përkatësisht $D^r_{x,2,2}f\in H(p,\alpha,\beta,1,\lambda)$. Me fjalë tjera, në pikën § 2.1 janë dhënë edhe karakteristikat konstruktive të klasëve të funksioneve të përkufizuara me anë të modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$.

Në këtë pikë japim karakteristikën konstruktive të klasës së funksioneve $L_{p,\alpha}$ përmes vlerësimit të përafrimit më të mirë me polinome algjebrike me anë të modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$.

Teorema vijuese shqyrton ekuivalencën në kuptim të Landau-t të modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë me K–funksionelin e Petree-së.

Teoremë 3.3.1. *Le të jenë dhënë numrat p, α dhe r të tillë që $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{cl} \frac{1}{2}<\alpha\le 1 & \text{për } p=1,\\ 1-\frac{1}{2p}<\alpha<\frac{3}{2}-\frac{1}{2p} & \text{për } 1<p<\infty,\\ 1\le\alpha<\frac{3}{2} & \text{për } p=\infty. \end{array}$$

Le të jetë $f\in L_{p,\alpha}$. Për çdo δ nga intervali $0\le\delta<\pi$ vlejnë mosbarazimet

$$C_1\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}K_r(f,\delta)_{p,\alpha}\le\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}\le\frac{C_2}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r}}K_r(f,\delta)_{p,\alpha},$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta pozitive të cilat nuk varen nga f dhe δ.

Vërtetim. Për çdo funksion $g(x)\in AD^r(p,\alpha)$ kemi

$$\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}\le\hat{\omega}_r(f-g,\delta)_{p,\alpha}+\hat{\omega}_r(g,\delta)_{p,\alpha}.$$

Duke zbatuar rrjedhimin 3.1.3 gjejmë

$$\hat{\omega}_r(f-g,\delta)_{p,\alpha}\le\frac{C_3}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r}}\|f-g\|_{p,\alpha}.$$

Më tutje, sipas teoremës 3.1.2 vlen

$$\hat{\omega}_r\,(g,\delta)_{p,\alpha} \le \frac{C_4}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r}}\delta^{2r}\left\|D^r_{x,2,2}g(x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Prandaj

$$\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha} \le \frac{C_5}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r}}\left(\|f-g\|_{p,\alpha}+\delta^{2r}\left\|D^r_{x,2,2}g(x)\right\|_{p,\alpha}\right).$$

Duke kaluar në këtë mosbarazim në infimum sipas $g(x)\in AD^r(p,\alpha)$ fitojmë mosbarazimin e djathtë të teoremës.

Për vërtetimin e mosbarazimit të majtë, për funksionin e dhënë $f\in L_{p,\alpha}$ shqyrtojmë funksionin $g_{\delta,r}$ të përkufizuar sipas rregullës

$$g_{\delta,r}(x)=\left(1-(1-H^r_\delta)^r\right)(f,x)\qquad\left(0<\delta\le\frac{\pi}{2}\right),$$

ku $1(f,x)=f(x)$, dhe

$$g_{\delta,r}(x)=g_{1,r}(x)\qquad\left(\frac{\pi}{2}<\delta<\pi\right).$$

Nga lema 3.2.6 rrjedh $H^l_\delta\,(f,x)\in AD^l(p,\alpha)$ $(l\in\mathbb{N})$. Meqë për operatorin H_δ vlen[3]

$$1-(1-H^r_\delta)^r=\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k H^{kr}_\delta,$$

atëherë, duke pasur parasysh se $AD^{kr}(p,\alpha)\subseteq AD^r(p,\alpha)$ $(k=1,\ldots,r)$, fitojmë

$$g_{\delta,r}(x)\in AD^r(p,\alpha).$$

Vlerësojmë shprehjen

$$\left\|D^r_{x,2,2}g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Meqë $H^{kr-l}_\delta\,(f,x)$ $(k=2,\ldots,r;l=0,1,\ldots,r-1)$ ka derivat $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}H^{kr-l}_\delta\,(f,x)$ të rendit $2r-1$ absolutisht të vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset(-1,1)$, duke zbatuar së pari teoremën e Lebesgue-ut mbi kalimin me limit nën shenjën e integralit, pastaj rrjedhimin 3.1.1, mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t dhe, në fund, teoremën 3.1.1 fitojmë

$$\begin{aligned}\left\|D^r_{x,2,2}H^{kr}_\delta\,(f,x)\right\|_{p,\alpha} &\le \frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\\ &\quad\times\int_0^v\left\|\hat{\tau}_u\left(D^r_{x,2,2}H^{kr-1}_\delta\,(f,x),x\right)\right\|_{p,\alpha}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv\\ &\le\frac{C_6}{\cos^4\frac{\delta}{2}}\left\|D^r_{x,2,2}H^{kr-1}_\delta\,(f,x)\right\|_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Duke zbatuar këtë mosbarazim $k-1$ herë fitojmë

$$\left\|D^r_{x,2,2}H^{kr}_\delta\,(f,x)\right\|_{p,\alpha}\le\frac{C_7}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(k-1)}}\left\|D^r_{x,2,2}H^r_\delta\,(f,x)\right\|_{p,\alpha}.$$

[3] Këtu shuma dhe fuqia e operatorëve janë dhënë në kuptim të zakonshëm të shumës dhe fuqisë së operatorëve linearë.

Meqë $g_{\delta,r}(x)$ paraqet shumë termash që përmbajnë $H_\delta^{kr}(f,x)$ $(k=1,\dots,r)$, atëherë sipas mosbarazimit të fundit gjejmë

$$\left\|D_{x,2,2}^r g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_8}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}} \left\|D_{x,2,2}^r H_\delta^r(f,x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Duke zbatuar rrjedhimi 3.2.1 kemi

$$\left\|D_{x,2,2}^r g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_8}{\varkappa(\delta)^r\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}} \left\|\hat{\Delta}_\delta^r(f,x)\right\|_{p,\alpha}.$$

Vlerësojmë nga poshtë $\varkappa(\delta)$ për $0<\delta\le\frac{\pi}{2}$. Kemi

$$\begin{aligned}\varkappa(\delta) &= \int_0^\delta \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\int_0^v \left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9 du\,dv\\ &\ge \cos^9\frac{\pi}{4}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\int_0^v \sin\frac{u}{2}\,du\,dv \ge \left(\sqrt{2}\right)^{-9}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta v^{-1}\int_0^v \sin u\,du\,dv\\ &= C_9\delta^2.\end{aligned}$$

Prej këtej rrjedh se për $0<\delta\le\frac{\pi}{2}$

$$\delta^{2r}\left\|D_{x,2,2}^r g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_{10}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}. \tag{3.14}$$

Nga ana tjetër

$$\begin{aligned}\|f(x)-g_{\delta,r}(x)\|_{p,\alpha} &= \|f(x)-(1-(1-H_\delta^r)^r)(f,x)\|_{p,\alpha}\\ &= \|(1-H_\delta^r)^r(f,x)\|_{p,\alpha}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Vërejmë se

$$1-H_\delta^r = (1-H_\delta)\circ\left(1+H_\delta+H_\delta^2+\cdots+H_\delta^{r-1}\right). \tag{3.16}$$

Duke zbatuar mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t dhe teoremën 3.1.1, për $l=1,2,\dots,r-1$ kemi

$$\begin{aligned}\left\|H_\delta^l(f,x)\right\|_{p,\alpha} &\le \frac{1}{\varkappa(\delta)}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\\ &\times\int_0^v \left\|\hat{\tau}_u\left(H_\delta^{l-1}(f,x),x\right)\right\|_{p,\alpha}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9 du\,dv\\ &\le \frac{C_{11}}{\cos^4\frac{\delta}{2}}\left\|H_\delta^{l-1}(f,x)\right\|_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Duke zbatuar këtë mosbarazim l herë fitojmë

$$\left\|H_\delta^l(f,x)\right\|_{p,\alpha} \le \frac{C_{12}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4l}}\|f\|_{p,\alpha}.$$

Prandaj, sipas mosbarazimit (3.16), duke zbatuar mosbarazimin e përgjithësuar të Minkowski-t kemi

$$\begin{aligned}\left\|\left(1-H_\delta^r\right)(f,x)\right\|_{p,\alpha} &\le \frac{C_{13}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4(r-1)}}\left\|\left(1-H_\delta\right)(f,x)\right\|_{p,\alpha}\\ &\le \frac{C_{13}}{\varkappa(\delta)\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4(r-1)}}\int_0^\delta\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{-9}\\ &\times\int_0^v\left\|\hat{\tau}_u(f,x)-f(x)\right\|_{p,\alpha}\left(\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}\right)^9du\,dv\\ &\le \frac{C_{14}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4(r-1)}}\sup_{0\le u\le\delta}\left\|\hat{\Delta}_u(f,x)\right\|_{p,\alpha}. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Nga barazimi (3.15) dhe mosbarazimi (3.17) fitojmë

$$\begin{aligned}&\left\|f(x)-g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha}\\ &\le \frac{C_{14}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4(r-1)}}\sup_{0\le t_1\le\delta}\left\|\hat{\Delta}_{t_1}\left(\left(1-H_\delta^r\right)^{r-1}(f,x),x\right)\right\|_{p,\alpha}. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Vërejmë se duke ndërruar renditjen e integrimit lehtë fitohet

$$\hat{\tau}_t\left(H_\delta(f,x),x\right)=H_\delta\left(\hat{\tau}_t(f,x),x\right).$$

Duke zbatuar këtë barazim r herë fitohet

$$\hat{\tau}_t\left(H_\delta^r(f,x),x\right)=H_\delta^r\left(\hat{\tau}_t(f,x),x\right).$$

Prej këtej marrim

$$\hat{\Delta}_t\left(\left(1-H_\delta^r\right)(f,x),x\right)=\left(1-H_\delta^r\right)\left(\hat{\Delta}_t(f,x),x\right).$$

Duke zbatuar së pari këtë barazim, pastaj mosbarazimin (3.18) dhe, në fund, mosbarazimin (3.17) fitojmë

$$\begin{aligned}&\left\|f(x)-g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha}\\ &\le \frac{C_{15}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4(r-1)}}\sup_{0\le t_1\le\delta}\sup_{0\le t_2\le\delta}\left\|\hat{\Delta}^2_{t_1,t_2}\left(\left(1-H_\delta^r\right)^{r-2}(f,x),x\right)\right\|_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Tani, duke zbatuar $r-1$ herë këtë procedurë fitojmë

$$\begin{aligned}\left\|f(x)-g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha} &\le \frac{C_{16}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}}\sup_{\substack{0\le t_i\le\delta\\ i=1,\dots,r}}\left\|\hat{\Delta}^r_{t_1,\dots,t_r}(f,x)\right\|_{p,\alpha}\\ &\le \frac{C_{16}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Në këtë mënyrë, për $0<\delta\le\frac{\pi}{2}$, nga mosbarazimi i fundit dhe mosbarazimi (3.14) rrjedh

$$\begin{aligned}I_\delta=\left\|f(x)-g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha}+\delta^{2r}\left\|D^r_{x,2,2}g_{\delta,r}(x)\right\|_{p,\alpha}\\ \le \frac{C_{17}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha},\end{aligned}$$

që vërteton mosbarazimin e majtë të teoremës për $0 < \delta \le \frac{\pi}{2}$.

Meqë për $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$ kemi $\delta^2 < \pi^2 \cdot 1$ dhe $1 < \frac{\pi}{2}$, atëherë sipas asaj që sapo vërtetuam kemi

$$I_\delta \le \pi^{2r}\left(\|f(x) - g_{1,r}(x)\|_{p,\alpha} + 1 \cdot \left\|D^r_{x,2,2} g_{1,r}(x)\right\|_{p,\alpha}\right)$$
$$\le C_{18}\hat{\omega}_r\left(f,1\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_{18}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)}}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}.$$

Për $\delta = 0$ mosbarazimi i majtë i teoremës është trivial.

Kështu mosbarazimi i majtë i teoremës u vërtetua për $0 \le \delta < \pi$.

Teorema 3.3.1 u vërtetua në tërësi. ■

Rrjedhim 3.3.1. *Le të jenë dhënë numrat p, α dhe r të tillë që $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$;*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} < \alpha \le 1 & \text{për } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} < \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \le \alpha < \frac{3}{2} & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Le të jetë $f \in L_{p,\alpha}$. Për çdo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $\delta \ge 0$ $(n\delta < \pi, \lambda\delta < \pi)$ vlejnë mosbarazimet

$$\hat{\omega}_r\left(f, n\delta\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_1}{\left(\cos\frac{n\delta}{2}\right)^{4r^2}} n^{2r}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$$

dhe

$$\hat{\omega}_r\left(f, \lambda\delta\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_2}{\left(\cos\frac{(\lambda+1)\delta}{2}\right)^{4r^2}} (\lambda+1)^{2r}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha},$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta pozitive të cilat nuk varen nga f, δ, n dhe λ.

Vërtetim. Vërtetojmë mosbarazimin e parë të lemës. Duke zbatuar teoremën 3.3.1 fitojmë

$$\hat{\omega}_r\left(f, n\delta\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_3}{\left(\cos\frac{n\delta}{2}\right)^{4r}} K_r\left(f, n\delta\right)_{p,\alpha}.$$

Meqë

$$K_r\left(f, n\delta\right)_{p,\alpha} \le n^{2r} \sup_{g \in AD^r(p,\alpha)} \left(\|f - g\|_{p,\alpha} + \delta^{2r}\left\|D_{x,2,2} g(x)\right\|_{p,\alpha}\right)$$
$$= n^{2r} K_r(f,\delta)_{p,\alpha},$$

kemi

$$\hat{\omega}_r\left(f, n\delta\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_3}{\left(\cos\frac{n\delta}{2}\right)^{4r}} n^{2r} K_r(f,\delta)_{p,\alpha}.$$

Duke aplikuar sërish teoremën 3.3.1 fitojmë

$$\hat{\omega}_r\left(f, n\delta\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_4}{\left(\cos\frac{n\delta}{2}\right)^{4r^2}} n^{2r}\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}.$$

Mosbarazimi i parë i rrjedhimit u vërtetua.

Tani, mosbarazimi i dytë i rrjedhimit implikohet nga mosbarazimi i parë. Vërtet, për $\lambda > 0$ të dhënë zgjedhim numrin $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ të tillë që $\lambda < N \leq \lambda + 1$. Atëherë, duke zbatuar mosbarazimin e sapovërtetuar fitojmë

$$\hat{\omega}_r\left(f, \lambda\delta\right)_{p,\alpha} \leq \hat{\omega}_r\left(f, N\delta\right)_{p,\alpha} \leq \frac{C_4}{\left(\cos\frac{N\delta}{2}\right)^{4r^2}} N^{2r} \hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$$
$$\leq \frac{C_4}{\left(\cos\frac{(\lambda+1)\delta}{2}\right)^{4r^2}} (\lambda+1)^{2r} \hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}.$$

Rrjedhimi 3.3.1 u vërtetua. ■

Vërejmë se rrjedhimi 3.3.1 është analog me vetinë e njohur mirë të modulit të zakonshëm të lëmueshmërisë [39, f. 116].

Rezultati vijues jep vlerësimin nga sipër dhe nga poshtë të përafrimit më të mirë me polinome algjebrike $E_n(f)_{p,\alpha}$ përmes modulit të përgjithësuar të lëmueshmërisë $\hat{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha}$. Mosbarazimi i tipit të mosbarazimit të majtë të teoremës vijuese, d.m.th. vlerësimi nga sipër i përafrimit më të mirë me anë të modulit të lëmueshmërisë, zakonisht quhet teoremë e Jackson-it. Në pajtim me këtë, mosbarazimi i tipit të mosbarazimit të djathtë të teoremës, d.m.th. vlerësimi nga poshtë i përafrimit më të mirë me anë të modulit të lëmueshmërisë, zakonisht quhet teoremë e anasjelltë me atë të Jackson-it.[4]

Teoremë 3.3.2. *Le të jenë dhënë numrat p, α dhe r të tillë që $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbf{N}$;*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 & \text{për } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} < \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} & \text{për } 1 < p < \infty, \\ 1 \leq \alpha < \frac{3}{2} & \text{për } p = \infty. \end{array}$$

Le të jetë $f \in L_{p,\alpha}$. Atëherë, për çdo numër natyror n vlejnë mosbarazimet

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha} \leq \hat{\omega}_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \leq \frac{C_2}{n^{2r}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2r-1} E_\nu\left(f\right)_{p,\alpha},$$

ku C_1 dhe C_2 janë konstanta pozitive të cilat nuk varen nga f dhe n.

Vërtetim. Për funksionin e çfarëdoshëm $g(x) \in AD^r(p,\alpha)$, duke zbatuar lemën 1.2.5 kemi

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq E_n\left(f-g\right)_{p,\alpha} + E_n\left(g\right)_{p,\alpha} \leq \|f-g\|_{p,\alpha} + \frac{C_3}{n^{2r}} \left\|D^r_{x,2,2} g(x)\right\|_{p,\alpha},$$

ku C_3 është konstantë e cila nuk varet nga g dhe n. Prej këtej, duke kaluar në infimum sipas të gjitha funksioneve $g(x) \in AD^r(p,\alpha)$ marrim

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq C_4 K_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha}.$$

Duke zbatuar teoremën 3.3.1 fitojmë

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq C_5 \left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{-4r(r-1)} \hat{\omega}_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \leq C_6 \hat{\omega}_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha}.$$

[4] Është e qartë se teorema e Jackson-it paraqet teoremë direkte, kurse ajo e anasjelltë me të – teoremë të anasjelltë në teorinë e përafrimeve.

Mosbarazimi i majtë i teoremës u vërtetua.

Vërtetojmë mosbarazimin e djathtë të teoremës. Le të jetë $P_n(x)$ polinomi algjebrik i përafrimit më të mirë për funksionin f, i shkallës jo më të madhe se $n-1$. Le të jetë k numër natyror i zgjedhur ashtu që

$$2^k \le n < 2^{k+1}.$$

Sipas teoremës 3.3.1, duke pasur parasysh se $P_{2^k}(x) \in AD^r(p,\alpha)$ kemi

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} &\le C_7 \left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{-4r} K_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \\ &\le C_8 \left(E_{2^k}(f)_{p,\alpha} + \frac{1}{n^{2r}} \left\|D^r_{x,2,2} P_{2^k}(x)\right\|_{p,\alpha}\right). \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Meqë

$$D^r_{x,2,2} P_{2^k}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} D^r_{x,2,2}\left(P_{2^{\nu+1}}(x) - P_{2^\nu}(x)\right),$$

duke zbatuar r herë rrjedhimin 1.2.1 fitojmë

$$\begin{aligned}\left\|D^r_{x,2,2} P_{2^k}(x)\right\|_{p,\alpha} &\le C_9 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)r} \left\|P_{2^{\nu+1}} - P_{2^\nu}\right\|_{p,\alpha} \\ &\le 2C_9 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)r} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Prandaj, duke marrë parasysh barazimin (3.19),

$$\hat{\omega}_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_{10}}{n^{2r}} \sum_{\nu=0}^{k} 2^{2(\nu+1)r} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}.$$

Tani, meqë për $\nu = 1, 2, \ldots, k$ vlen

$$\sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} j^{2r-1} E_j(f)_{p,\alpha} \ge E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha} \sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} j^{2r-1} \ge 2^{2(\nu-1)r} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha},$$

kemi

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} &\le \frac{C_{11}}{n^{2r}} \left\{2^{2r} E_1(f)_{p,\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} j^{2r-1} E_j(f)_{p,\alpha}\right\} \\ &\le \frac{C_{12}}{n^{2r}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2r-1} E_\nu(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Teorema 3.3.2 u vërtetua. ■

Rezyme

Për funksionet 2π–periodike janë mirë të njohura lidhmëritë ndërmjet modulit të zakonshëm të lëmueshmërisë të rendit r të funksionit dhe përafrimeve më të mira të tij me polinome trigonometrike të shkallës së dhënë. Dy rezultate karasteristike në këtë drejtim paraqesin teorema mbi koincidencën e klasëve, e cila jep karakteristikën strukturale të klasës së funksioneve të përkufizuar me anë të rendit të përafrimeve më të mira me polinome trigonometrike, dhe teorema e Jackson-it, e cila jep karakteristikën konstruktive të funksioneve nga klasa L_p.

Gjatë shqyrtimit të funksioneve joperiodike të dhëna në ndonjë segment të fundëm të boshtit real nuk është e mundur të fitohen lidhmëri të tilla ndërmjet modulit të zakonshëm të lëmueshmërisë të atyre funksioneve dhe përafrimeve më të mira të tyre me polinome algjebrike.

Megjithatë, një analogji e plotë me rastin 2π–periodik ka vend në qoftë se moduli i zakonshëm i lëmueshmërisë zëvendësohet me ndonjë modul të përgjithësuar të lëmueshmërisë.

Në këtë punim, për funksionin e dhënë joperidik të përkufizuar në segmentin $[-1, 1]$ janë përkufizuar dy operatorë josimetrikë të translacionit të përgjithësuar. Me anë të tyre janë përkufizuar dy module të përgjithësuara të lëmueshmërisë të rendit r. Për modulin e parë është arritur të vërtetohet teorema mbi koincidencën e klasëve. Gjithashtu, përmes këtij moduli dhe operatorit përkatës të diferencimit janë dhënë karakteristikat strukturale të klasave të funksioneve të përkufizuara me anë të rendit të zvogëlimit të përafrimeve më të mira me polinome algjebrike. Për modulin tjetër është vërtetuar teorema e Jackson-it dhe teorema e anasjelltë me të, përkatësisht është dhënë vlerësimi nga sipër dhe nga poshtë i përafrimeve më të mira me polinome algjebrike përmes këtij moduli të përgjithësuar të lëmueshmërisë.

Summary

For a 2π–periodic function there are well-known relations between the usual modulus of smoothness of order r of the function and its best approximations by trigonometric polynomials of given degree. Two results are characteristic for this field: Theorem of coincidence of classes, giving the structural characteristic of the class of functions defined by means of the order of the best approximations by trigonometric polynomials, and Jackson's Theorem, giving the constructive characteristic of functions belonging to the class L_p.

While considering non-periodic functions given on a finite segment of the real axle, such relations between the usual modulus of smoothness of these functions and their best approximations by algebraic polynomials can not be obtained.

Although, a complete analogy with the 2π–periodic case can be obtained if the usual modulus of smoothness is substituted with a generalised modulus of smoothness.

In this paper, for a non-periodic function given on the segment $[-1, 1]$ two asymmetric operators of generalised translation are defined. By their means two generalised moduli of smoothness of order r are defined. For the first generalised modulus of smoothness, the Theorem of coincidence of classes is proved. Also, by means of this modulus and the appropriate derivative operator the structural characteristics of classes of functions defined by the order of decrement of the best approximations by algebraic polynomials are given. For the other generalised modulus of smoothness, the Jackson's Theorem and Theorem converse to it are proved, i.e. the estimate from above and below of the best approximation by algebraic polynomials by means of this modulus are given.

Literatura

[1] J. de la Vallée-Poussin, *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonneés equidistantes*, Bull. Acad. Belgique, (1908).

[2] H. Lebesgue, *Sur les intégrales singuliéres*, Ann. Fac. Sci. Un. Toulouse, (1909).

[3] S. N. Bernsteĭn, *O priblizhenii nepreryvnykh funktsiĭ polinomami*, Soch. Izd. AN SSSR, (1952), 8–10.

[4] S. N. Bernshteĭn, *O nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsiĭ posredstvom mnogochlenov dannoĭ stepeni*, Soch. Izd. AN SSSR, (1952), 11–104.

[5] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Gummen gegebener Ordnung*: Preisschrift und Inaugural Dissertation, Göttinger, 1911.

[6] S. B. Stechkin, *O poryadke nailuchshikh priblizhenii nepreryvnykh funktsiĭ*, Izv. AN SSSR, ser. mat., 19 (1951), 219–242.

[7] S. M. Nikol'skiĭ, *O nailuchshem priblizhenii mnogochlenami funktsiĭ, udovletvoryayushchikh usloviyu Lipshitsa*, Izv. AN SSSR, ser. mat., 10 (4)(1946), 295–322.

[8] A. F. Timan, *Priblizhenie funktsiĭ, udovletvoryayushchikh usloviyu Lipshitsa, obyknovennymi mnogochlenami*, DAN SSSR, 77 (1951), 969–972.

[9] V. K. Dzyadyk, *O konstruktivnoĭ kharakteristike funktsiĭ, udovletvoryayushchikh usloviyu* Lip α $(0 < \alpha < 1)$ *na konechnom otrezke veshchestvenoĭ osi*, Izv. AN SSSR, ser. mat., 20 (2)(1956), 623–642.

[10] V. P. Motornyĭ, *Priblizhenie funktsiĭ algebraicheskimi polinomami v metrike L_p*, Izv. AN SSSR, ser. mat., 35 (1971), 874–899.

[11] G. K. Lebed', *Nekotorye voprosy priblizheniya funktsiĭ odnoĭ peremennoĭ algebraicheskimi mnogochlenami*, DAN SSSR, 118 (2)(1958), 239–242.

[12] M. K. Potapov, *O teoremakh tipa Dzheksona v metrike L_p*, DAN SSSR, 111 (6)(1956), 1185–1188.

[13] M. K. Potapov, *O priblizhenii neperiodicheskikh funktsiĭ algebraicheskimi polinomami*, Vest. MGU, 4 (1960), 14–25.

[14] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of continuity*, New York–Berlin, 1987.

[15] S. Pawelke, *Ein Satz von Jacksonschen Typ für algebraische Polynome*, Acta Sci. Math. 33 (3–4)(1972), 323–336.

[16] K. G. Ivanov, *Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in* $C[-1,1]$ *and* $L_p[-1,1]$, C.R. Acad. Bulgare Sci., 33 (10)(1980), 1309–1312.

[17] K. G. Ivanov, *On a new characterization of functions II, direct and converse theorems for the best algebraic approximation in* $C[-1,1]$ *and* $L_p[-1,1]$, PLISKA Stud. Math. Bulgar., 5 (1983), 151–163.

[18] P. L. Butzer, R. L. Stens, M. Wehrens, *Higher order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 2 (1980), 83–87.

[19] M. Q. Berisha, M. K. Potapov, F. H. Berisha, *O polinomiyal'noĭ aproksimatsii v integral'noĭ metrike s vesom Yakobi*, Vest. MGU, ser. mat.–mekh., 5 (1990), 33–38.

[20] M. K. Potapov, *O strukturnykh i konstruktivnykh kharakteristikakh nekotorykh klassov funktsiĭ*, Tr. Mat. inst. AN SSSR, 131 (1974), 211–231.

[21] M. K. Potapov, *O strukturnykh kharakteristikakh klassov funktsiĭ s dannym poryadkom nailuchshego priblizheniya*, Tr. Mat. inst. AN SSSR, 134 (1975), 260–277.

[22] M. K. Potapov, *O priblizhenii algebraicheskimi mnogochlenami v integral'noĭ metrike s vesom Yakobi*, Vest. MGU, ser. mat.–mekh., 4 (1983), 43–52.

[23] M. K. Potapov, V. M. Fedorov, *O teoremakh Dzheksona dlya obobshchennogo modulya gladkosti*, Tr. Mat. inst. AN SSSR, 172 (1985), 291–295.

[24] M. K. Potapov, *The operators of generalized translation in the approximation theory*, Proc. II Math. Conf. Priština, 1997, 27–36.

[25] M. K. Potapov, *O primenenii odnogo operatora obobshchennogo sdviga v teorii priblizheniya*, Vest. MGU, ser. mat.–mekh., 1998, N. 3, 38–48.

[26] M. K. Potapov, *O sovpadenii klassov funktsiĭ opredelyaemykh operatorom obobshchennogo sdviga ili poryadkom nailuchshego priblizhenya algebraicheskimi mnogochlenami*, (në shtyp).

[27] F. M. Berisha, *On coincidence of classes of functions defined by the generalised modulus of smoothness and appropriate inverse theorem*, Math. Montisnigri (në shtyp).

[28] M. K. Potapov, F. M. Berisha, *On coincidence of classes of functions defined by the generalised modulus of smoothness of order* k *or by the order of the best approximations by algebraic polynomials*, East J. Approx. (në shtyp).

[29] M. K. Potapov, F. M. Berisha, *The direct and inverse theorem in approximation theory for a generalised modulus of smoothness*, Analysis Math., (në shtyp).

[30] M. K. Potapov, F. M. Berisha, *O svyazi mezhdu r-im obobshchennym medulem gladkosti i nailuchshimi priblizheniyami algebraicheskimi mnogochlenami*, Fund. Prikl. Mat., (në shtyp).

[31] I. P. Natanson, *Konstruktivnaya teoriya funktsiĭ*, Moskva–Leningrad, 1949.

[32] S. M. Nikol'skiĭ, *Priblizhenie funktsiĭ mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moskva, 1969.

[33] B. A. Halilova, *O nekotorykh otsenkakh dlya polinomov*, Izv. AN AzSSR, 2 (1974), 46–55.

[34] M. K. Potapov, *Ob usloviyakh sovpadeniya nekotorykh klassov funktsiĭ*, Tr. sem. im. Petrovskogo, 6 (1981), 223–238.

[35] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, (përkthimi në rusisht) Moskva, 1948.

[36] G. Bateman, A. Erdeyi, *Higher transcendental functions*, (përkthimi në rusisht) Moskva, 1969.

[37] N. K. Bari, *Trigonometricheskie ryady*, Moskva, 1961.

[38] I. P. Natanson, *Teoriya funktsiĭ veshchestvenoĭ peremennoĭ*, Moskva, 1974.

[39] A. F. Timan, *Teoriya priblizheniya funktsiĭ deĭstvitel'nogo peremennogo*, Moskva, 1960.

[40] N. Ya. Vilenkin, *Spetsiyal'nye funktsii i teoriya predstavleniya grupp*, Moskva, 1965.

[41] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiĭ i funktsional'nogo analiza*, Moskva, 1989.

[42] S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Ortogonal series theory*, (përkthimi në rusisht) Moskva, 1958.

Biografia e autorit

Autori, mr. sci. Faton Berisha, u lind më 16.02.1968 në Prishtinë. Shkollën fillore dhe të mesmen – gjimnazin i kreu në Prishtinë me sukses të shkëlqyeshëm. Si nxënës i shkollës fillore dhe të mesme ka qenë pjesëmarrës i shumëfishtë i garave federative (ish-federata jugosllave) në matematikë.

Studimet në Seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë i filloi në tetor të vitit 1987 dhe i mbaroi në afat rekord në qershor të vitit 1991 me notë mesatare 9.83. Gjatë tërë kohës së studimeve ishte bursist i Universitetit të Prishtinës. Në vitin 1988 ka marrë pjesë në garat ndërkombëtare të matematikës në Beograd. Për suksesin e treguar në studime, me rastin e festës së Universitetit të Prishtinës më 1991 është nderuar me diplomën "Student i Dalluar".

Në tetor të vitit 1991 është zgjedhur ligjërues për lëndët: Matematikë dhe Metodikë e matematikës në Grupin e mësimit klasor të Shkollës së Lartë Pedagogjike në Prishtinë. Prej vitit 1992 deri në vitin 1994 ka qenë i angazhuar në mbajtjen e ushtrimeve nga lëndët: Ekuacione diferenciale, Teori e gjasës dhe Matematikë I për studentët e fizikës, në Seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë.

Në vitin 1994 zgjedhet asistent në Seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë. Deri në tetor të vitit 1996 ishte i angazhuar si bashkëpunëtor i jashtëm në mbajtjen e ushtrimeve nga lëndët: Analizë matematike I dhe Analizë funksionale në Seksionin e matematikës.

Në tetor të vitit 1996 kalon në marëdhënie të rregullt pune – asistent në Seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë, në të cilën cilësi ndodhet edhe tani. Nga viti shkollor 1996/97 autorizohet të mbajë ligjëratat nga lënda Hyrje në informatikë me baza të programimit për studentët e Seksionit të gjeografisë. Nga viti shkollor 1997/98 gjithashtu autorizohet të mbajë ligjëratat nga lënda Gjuhët e programimit I në Seksionin e matematikës.

Në vitin shkollor 1992/93 është regjistruar në studimet postdiplomike në Seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë. Në maj të vitit 1996 mbaron provimet e parapara me rregulloren e studimeve postdiplomike me notë mesatare 10. Në prill të vitit 1997 mbron me sukses temën e magjistraturës me titull *Zbatimi i përafrimit më të mirë dhe modulit të lëmueshëmrisë në vlerësimin e koeficientëve Fourier të funksionit çift.*

Nga tetori i vitit 1997 deri në mars të vitit 1998 qëndron në specializim pranë Katedrës së teorisë së funksioneve dhe analizës funksionale në Fakultetin Mekaniko–matematik të Universitetit shtetëror "Lomonosov" të Moskës.

Si autor ose koautor ka publikuar dhe ka dorëzuar për publikim këto punime shkencr:e:

1. *Zbatimi i përafrimit më të mirë dhe modulit të lëmueshmërisë në vlerë-*

simin e koeficientëve Fourier të funksionit çift (Punim magjistrature), Prishtinë, 1996, autor.

2. *On some transforms of trigonometric series*, Publ. Inst. Math. Nouv. ser. 61 (75) (1997), Beograd, 53-60, koautor.

3. *On coincidence of classes of functions defined by the generalised modulus of smoothness and appropriate inverse theorem*, Math. Montisnigri, Podgorica (në shtyp), autor.

4. *On coincidence of classes of functions defined by the generalised modulus of smoothness of order k or by the order of best the approximations by algebraic polynomials*, East. J. Appr. Theory, Sofia (në shtyp), koautor.

5. *The direct and inverse theorem in approximation theory for a generalised modulus of smoothness*, Analysis Math., Moskva–Budapest (në shtyp), koautor.

6. *O svyazi mezhdu r-im obobshchennym medulem gladkosti i nailuchshimi priblizheniyami algebraicheskimi mnogochlenami*, Fund. Prikl. Mat., Moskva (në shtyp), koautor.

7. *Some inequalities about monotone sequences*, Facta Univ. Ser. Math. Inform., Niš (në shtyp), autor.

8. *Sharpening of estimates of modulus of smoothness*, Kërkime, ASHAK, Prishtinë (në shtyp), autor.

9. *Note on estimates of Fourier coefficients of a function belonging to the classes of Nikol'skiĭ*, Kërkime, ASHAK, Prishtinë (në shtyp), koautor.

10. *On some transforms of trigonometric series*, Bul. FSHMN 11 (1996), Prishtinë, 69-77, autor.